

COLLE 9 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — **Intégrales de Wallis (relation de récurrence).**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos^{n+1}(t) dt$

Posons : $\forall t \in [0, \pi/2], \quad \begin{cases} u(t) = \sin(t) \\ v(t) = \cos^{n+1}(t) \end{cases} \quad \text{d'où : } \forall t \in [0, \pi/2], \quad \begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = -(n+1) \sin(t) \cos^n(t) \end{cases}$

Selon la formule d'IPP (u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$) :

$$I_{n+2} = \underbrace{[\sin(t) \cos^{n+1}(t)]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^n(t) dt$$

$$\text{D'où : } I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt = (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt - (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt$$

$$\text{C'est-à-dire : } I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2} \quad \text{d'où : } \boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$$

QUESTION DE COURS N°2 — **Propriété - Stabilité par combinaison linéaire de l'ensemble des solutions de $ay' + by = 0$.**

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues (avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Notons (H) l'équation différentielle homogène $ay' + by = 0$.

Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Si f et g sont solutions de (H) , alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est solution de (H) .

Preuve. Sous les hypothèses de l'énoncé on a pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned} & a(\lambda f + \mu g)' + b(\lambda f + \mu g) \\ &= a(\lambda f' + \mu g') + b(\lambda f + \mu g) \quad (\text{linéarité de la dérivation}) \\ &= a\lambda f' + a\mu g' + b\lambda f + b\mu g \\ &= \lambda \underbrace{(af' + bf)}_{=0} + \mu \underbrace{(ag' + bg)}_{=0} \quad (f \text{ et } g \text{ solutions de } (H)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En résumé : $a(\lambda f + \mu g)' + b(\lambda f + \mu g) = 0$. Ce qui signifie que la fonction $\lambda f + \mu g$ est solution de (H) .

QUESTION DE COURS N°3 — **Propriété - Structure de l'ensemble des solutions de $ay' + by = c$.**

Soient $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues *

Soit f_P une solution particulière de l'EDL1 $(E) : ay' + by = c$

Soit enfin $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. On a :

$$(\varphi \text{ est solution de } (E)) \iff (\varphi - f_P \text{ est solution de } ay' + by = 0)$$

Preuve. Sous les hypothèses de l'énoncé, φ est en particulier dérivable sur I et on a :

$$\begin{aligned} & \varphi \text{ est solution de } (E) \\ & \iff a\varphi' + b\varphi = c \\ & \iff a\varphi' + b\varphi = af_P' + bf_P \quad (\text{car } f_P \text{ est solution de } (E)) \\ & \iff a(\varphi' - f_P') + b(\varphi - f_P) = 0 \\ & \iff a(\varphi - f_P)' + b(\varphi - f_P) = 0 \quad (\text{par linéarité de la dérivation}) \\ & \iff \varphi - f_P \text{ est solution de } ay' + by = 0 \quad \text{Ce qui achève la preuve. } \triangle \end{aligned}$$

Cet énoncé assure que la solution générale de l'EDL1 $ay' + by = c$ est la somme d'une solution particulière de celle-ci, et de la solution générale de l'équation homogène associée à (E) .

QUESTION DE COURS N°4 — **Théorème (solution générale d'une EDL1 homogène)**. Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, a ne s'annulant pas sur I .

Les solutions de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions $f_k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définies sur I par $f_k(x) = \lambda e^{-A(x)}$ ($\lambda \in \mathbb{K}$), où A désigne une primitive sur I de la fonction $\frac{b}{a}$.

Preuve. Notons (E) l'EDL : $a(x)y' + b(x)y = 0$.

La fonction b/a est continue sur I (H+TG). A ce titre, b/a admet des primitives sur I (théorème fondamental de l'Analyse); notons A l'une d'entre elles.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Définissons une fonction g en posant : $\forall x \in I, g(x) = \varphi(x)e^{A(x)}$.

La fonction g est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$, H+TG) sur I , et :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, g'(x) &= \varphi'(x)e^{A(x)} + \frac{b(x)}{a(x)} \varphi(x)e^{A(x)} \\ \iff \forall x \in I, g'(x) &= e^{A(x)} \left(\varphi'(x) + \frac{b(x)}{a(x)} \varphi(x) \right) \quad (\spadesuit) \end{aligned}$$

Ce calcul fait on a :

g est constante sur I

$$\iff \forall x \in I, g'(x) = 0$$

$$\iff \forall x \in I, e^{A(x)} \left(\varphi'(x) + \frac{b(x)}{a(x)} \varphi(x) \right) = 0 \quad (d'après ((\spadesuit)))$$

$$\iff \forall x \in I, \varphi'(x) + \frac{b(x)}{a(x)} \varphi(x) = 0 \quad (e^{A(x)} \neq 0)$$

$$\iff \forall x \in I, a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) = 0 \quad (a(x) \neq 0)$$

$$\iff \varphi \text{ solution de (E)}$$

En résumé, φ est solution de (E) SSI il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $g = \lambda$.

Autrement écrit : φ est solution de (E) SSI $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in I, \varphi(x)e^{A(x)} = \lambda$

Conclusion. φ est solution de (E) SSI $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in I, \varphi(x) = \lambda e^{-A(x)}$

QUESTION DE COURS N°5 — **“La méthode de variation de la constante marche à tous les coups”.**

Plus précisément, avec les notations et hypothèses de la question de cours 4, il existe une fonction $K \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que la fonction f_P définie par

$$\forall x \in I, f_P(x) = K(x)e^{-A(x)} \quad (\text{où } A \text{ est une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } I)$$

est solution de l'équation différentielle (E).

Preuve. Soit $K \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Posons : $\forall x \in I, f_P(x) = K(x)e^{-A(x)}$. La fonction f_P est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (H+TG). A ce titre, elle est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, f'_P(x) = e^{-A(x)} (K'(x) - A'(x)K(x)) = e^{-A(x)} \left(K'(x) - \frac{b(x)}{a(x)} K(x) \right)$$

On en déduit que :

f_P est solution de (E)

$$\iff \forall x \in I, a(x)f'_P(x) + b(x)f_P(x) = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, a(x)e^{-A(x)} \left(K'(x) - \frac{b(x)}{a(x)} K(x) \right) + b(x)K(x)e^{-A(x)} = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, a(x)e^{-A(x)} K'(x) - \underbrace{b(x)K(x)e^{-A(x)} + b(x)K(x)e^{-A(x)}}_{=0} = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, a(x)e^{-A(x)} K'(x) = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)} e^{A(x)} \quad (\spadesuit)$$

Les hypothèses du théorème et les théorèmes généraux sur la continuité assure que la fonction $x \mapsto \frac{c(x)}{a(x)} e^{A(x)}$ est continue sur I ; elle admet donc une primitive sur I . En d'autres termes, il existe une fonction K de classe $\mathcal{C}^1$ sur I satisfaisant l'identité $(\spadesuit)$. On en déduit que la fonction $f_P : x \in I \mapsto K(x)e^{-A(x)}$ est solution de (E).

BANQUE D'EXERCICES

► **Définition.** On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

Exo-W 1. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$

Exo-W 2. — Montrer que la suite (I_n) est positive, décroissante, convergente.

Exo-W 3. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$. (en admettant le résultat de la question de cours 1)

En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (on pourra justifier brièvement que la suite (I_n) converge vers une limite $\ell \geq 0$, mais on ne demande pas de refaire intégralement l'exercice W-2!)

Exo-W 4. — Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$ (en admettant le résultat de la question de cours 1)

EXERCICE 1. — Calcul de $\int \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx$ (primitive sur $\mathbb{R}$)

EXERCICE 2. — Calcul de $\int \frac{1}{x^2 - 7x + 6} dx$ (primitive sur $]6, +\infty[$)

EXERCICE 3. — Calcul de $\int \frac{1}{\cos(x)} dx$ (primitive sur $] -\pi/2, \pi/2[$)

EXERCICE 4. — Calcul de $\int e^{-x} \sin(2x) dx$ (primitive sur $\mathbb{R}$)

L'exercice 5 ci-dessous est **non-exigible** en colle la semaine prochaine, et est donné à titre d'exo d'entraînement. Au passage, il permet d'établir un joli résultat sur le nombre e, qui sera généralisé cette année au S2, et archi-généralisé en Spé...

EXERCICE 5. — On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$

1/ Montrer que (I_n) tend vers 0.

2/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n!} = I_{n-1} - I_n$

3/ En déduire que : $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

Exo-W 1. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$

Soit n un entier naturel. Selon la formule du changement de variable :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt \underset{u=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\pi/2}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right) (-du) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt = I_n$$

Exo-W 2. — Montrer que la suite (I_n) est positive, décroissante, convergente.

➤ Pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times [0, \pi/2]$, on a : $\cos^n(t) \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt \geq 0$. La suite (I_n) est positive.

➤ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) - \cos^n(t) dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geq 0} \underbrace{(\cos(t) - 1)}_{\leq 0} dt$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n \leq 0$. La suite (I_n) est décroissante.

➤ La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0) : donc elle est convergente (théorème de la limite monotone).

Exo-W 3. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$. En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $(n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$.

Deux calculs immédiats donnent $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. On en déduit que $P(0)$ est vraie.

Supposons à présent la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(n+2) I_{n+2} I_{n+1} = (n+2) \frac{n+1}{n+2} I_n I_{n+1} = (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$$

la première égalité provenant de la question de cours 1, et la dernière de l'hypothèse de récurrence. On en déduit que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$ (♠)

La suite (I_n) étant décroissante et positive, elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

Supposons $\ell > 0$. Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = \ell^\dagger$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} I_n = \ell^2 > 0$.

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) I_{n+1} I_n = +\infty$. Contradiction avec (♠).

Il s'ensuit que $\ell = 0$. Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

†. Facile à comprendre, mais admis à ce stade de l'année. A l'attention des colleurs : aucun résultat sur les suites extraites n'a été vu en cours à ce jour.

Exo-W 4. — Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$ (en admettant le résultat de la question de cours 1)

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, notons $P(p)$: $I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$

Initialisation : pour $p = 0$, on a d'une part $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1$ et d'autre part $\frac{2^0 (0!)^2}{1!} = 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $P(p)$ vraie pour un certain entier naturel p .

$$\text{On a : } I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} = \frac{2(p+1)}{2p+3} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^2 (p+1)^2}{2(p+1)(2p+3)} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2(p+1)} [(p+1)!]^2}{(2p+3)!}$$

Ce qui signifie que $P(p+1)$ est vraie, et achève la preuve de l'hérédité.

Conclusion. $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$

EXERCICE 1. — Calcul de $\int \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx$ (primitive sur $\mathbb{R}$)

$$\text{On a : } \int \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}} dx = \int \frac{2}{2 + e^x + e^{-x}} dx.$$

En posant $u = e^x$ dans l'intégrale précédente, on obtient :

$$\int \frac{2}{2 + u + \frac{1}{u}} \times \frac{1}{u} du = \int \frac{2}{u^2 + 2u + 1} du = 2 \int \frac{1}{(u+1)^2} du = -\frac{2}{u+1}$$

$$\text{Finalement : } \int \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx = -\frac{2}{e^x + 1}$$

EXERCICE 2. — Calcul de $\int \frac{1}{x^2 - 7x + 6} dx$ (primitive sur $]6, +\infty[$)

$$\text{Soit } x \text{ un réel } > 6. \text{ On a : } \frac{1}{x^2 - 7x + 6} = \frac{1}{(x-1)(x-6)}.$$

$$\text{Il existe donc deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que : } \frac{1}{x^2 - 7x + 6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-6} \quad (\spadesuit) \text{ (décomposition en éléments simples).}$$

On peut déterminer a et b par la méthode de multiplication/évaluation[‡] :

$$\text{➤ Calcul de } a. (x-1) \times (\spadesuit) \iff \frac{1}{x-6} = a + \frac{b(x-1)}{x-6}. \text{ Par évaluation en } 1 : a = -\frac{1}{5}$$

$$\text{➤ Calcul de } b. (x-6) \times (\spadesuit) \iff \frac{1}{x-1} = \frac{a(x-6)}{x-1} + b. \text{ Par évaluation en } 6 : b = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ainsi : } \int \frac{1}{x^2 - 7x + 6} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-1} dx = \ln \left(\left(\frac{x-6}{x-1} \right)^{1/5} \right)$$

‡. Plus que celle d'identification, à utiliser in articulo mortis.

EXERCICE 3. — Calcul de $\int \frac{1}{\cos(x)} dx$ (primitive sur $] -\pi/2, \pi/2[$)

Changement de variable : $u = \tan(x/2)$; $x = 2\arctan(u) \Rightarrow dx = \frac{du}{1+u^2}$.

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{1+u^2}{1-u^2} \times \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{1}{1-u^2} du = \int \frac{1}{(1-u)(1+u)} du$$

Il existe deux réels a et b tels que : $\frac{1}{1-u^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}$ (♠) (décomposition en éléments simples).

On peut déterminer a et b par la méthode de multiplication/évaluation :

➤ **Calcul de a .** $(1-u) \times (\spadesuit) \Leftrightarrow \frac{1}{1+u} = a + \frac{b(1-u)}{1+u}$. Par évaluation en 1 : $a = \frac{1}{2}$

➤ **Calcul de b .** $(1+u) \times (\spadesuit) \Leftrightarrow \frac{1}{1-u} = \frac{a(1+u)}{1-u} + b$. Par évaluation en -1 : $b = \frac{1}{2}$

$$\text{Ainsi : } \int \frac{1}{(1-u)(1+u)} du = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du = \frac{1}{2} (-\ln(1-u) + \ln(1+u)) = \ln \left(\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \right)$$

$$\text{Finalement : } \int \frac{1}{\cos(x)} dx = \ln \left(\sqrt{\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}} \right)$$

EXERCICE 4. — Calcul de $\int e^{-x} \sin(2x) dx$ (primitive sur $\mathbb{R}$)

$$\text{On a : } \int e^{-x} \sin(2x) dx = \text{Im} \left(\int e^{-x} e^{2ix} dx \right) = \text{Im} \left(\int e^{(-1+2i)x} dx \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{-1+2i} e^{(-1+2i)x} \right)$$

$$\text{Or : } \frac{1}{-1+2i} e^{(-1+2i)x} = \frac{-1-2i}{5} e^{-x} (\cos(2x) + i \sin(2x)). \text{ Par suite : } \text{Im} \left(\frac{1}{-1+2i} e^{(-1+2i)x} \right) = -\frac{e^{-x}}{5} (2 \cos(2x) + \sin(2x))$$

$$\text{Finalement : } \int e^{-x} \sin(2x) dx = -\frac{e^{-x}}{5} (2 \cos(2x) + \sin(2x))$$

EXERCICE 5. — On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$

1/ Montrer que (I_n) tend vers 0.

$$\text{Pour tout } (x, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N} \text{ on a : } 0 \leq \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \leq \frac{e}{n!}.$$

$$\text{Par croissance de l'intégrale : } 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}.$$

$$\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

2/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n!} = I_{n-1} - I_n$

$$\text{Soit } n \text{ un entier naturel non nul. On a : } I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \underbrace{(1-x)^n}_{v(x)} \underbrace{e^x}_{u'(x)} dx$$

Selon la formule d'intégration par parties :

$$I_n = \frac{1}{n!} \left([(1-x)^n e^x]_0^1 + n \int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx \right) = -\frac{1}{n!} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx}_{I_{n-1}}$$

$$\text{Ainsi : } I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}. \text{ On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n!} = I_{n-1} - I_n.$$

3/ En déduire que : $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \underbrace{=}_{\text{Chasles}} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \underbrace{=}_{\text{q. 2}} 1 + \sum_{k=1}^n (I_{k-1} - I_k) \underbrace{=}_{\text{télésco}} 1 + I_0 - I_n$$

Or : $I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$. Il s'ensuit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e - I_n$ ($\spadesuit$).

Or, selon la q.1, on a : $\lim_{n \rightarrow 0} I_n = 0$.

On en déduit, avec ($\spadesuit$), que : $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Remarque (pour l'avenir !). Plus tard cette année, nous noterons ce résultat :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

On dira alors que *la série de terme général $\frac{1}{k!}$ est convergente et a pour somme e* (dans le chapitre sur les séries).

On prouvera également une version plus générale de ce résultat : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$