

Chapitre 8 : Primitives et intégrales

1 – Primitives (généralités)

2 – Primitives usuelles

3 – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

4 – Intégration par parties

5 – Changement de variable

6 – Compléments

a) Extension aux fonctions à valeurs complexes ; essentiellement pour le calcul de $\int e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx$ ou de $\int e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx$

b) Calcul de $\int \frac{1}{x^2 + bx + c} dx$, en distinguant 3 cas suivant la valeur de Δ ($\Delta > 0 \rightarrow$ décomposition en éléments simples ; $\Delta = 0 \rightarrow$ formalité ; $\Delta < 0 \rightarrow$ changement de variable pour se ramener à arctan)

c) Changement de variable $u = \tan(x/2)$, par exemple pour le calcul de $\frac{dx}{\cos x}$ ou $\frac{dx}{\sin x}$

d) Incontournable 1 : $e = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

e) Incontournable 2 : intégrales de Wallis

Chapitre 9 : Equations différentielles linéaires

Convention : dans ce chapitre, I est un intervalle non-vidé de $\mathbb{R}$; et la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Méthode “universelle” de résolution pour une EDL 1 ou 2 :

- (i) Résolution de l'équation homogène (H) associée à (E)
- (ii) Détermination d'une solution particulière de (E)
- (iii) Conclusion : la solution générale de (E) est $S_H + S_P$ où S_H désigne la solution générale de (H) et S_P une solution particulière de (E) .

1 – Equations différentielles linéaires d'ordre 1 (EDL1)

Théorème (solution générale d'une EDL1 homogène). Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, a ne s'annulant pas sur I . Les solutions de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions $f_C : I \rightarrow \mathbb{K}$ définies sur I par $f_C(x) = Ce^{-A(x)}$ ($C \in \mathbb{K}$), où A désigne une primitive sur I de la fonction $\frac{b}{a}$.

Pour le second point, on peut utiliser son intuition, ou la **méthode de variation de la constante**, en cherchant une solution particulière f_P de l'équation avec second membre sous la forme “ $f_P(x) = \underline{C(x)}e^{-A(x)}$ ”.

Théorème (existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy d'ordre 1). Soient a, b et c trois fonctions de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, tq a ne s'annule pas sur I . On note (E) l'EDL1 : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.

Pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ tq :

$$\begin{cases} \forall x \in I, & a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) = c(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

QUESTIONS DE COURS

- **Exercice.** Intégrales de Wallis (relation de récurrence) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

- **Propriété.** Stabilité par combinaison linéaire de l'ensemble des solutions de $ay' + by = 0$.

- **Propriété.** Structure de l'ensemble des solutions de $ay' + by = c$.

- **Théorème.** Solution générale d'une EDL1 homogène.

- **Théorème.** Existence d'une solution pour une EDL1 ou "La méthode de variation de la constante marche à tous les coups!".

APRÈS LA QC : UN EXO EXTRAIT DE LA BANQUE D'EXERCICES

OBJECTIFS

Compétences particulières pour cette colle

- Savoir reconnaître et déterminer rapidement une primitive usuelle
- Calcul d'une intégrale/primitive en utilisant une intégration par parties, ou un changement de variable
- Connaître la définition de l'intégrale de Wallis I_n , et savoir retrouver la relation de récurrence $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ (se souvenir de l'astuce du " $n+2 = (n+1) + 1$ ")

- Calcul de $\int e^{ax} \cos(bx) dx$ en observant que

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \operatorname{Re} \left(\int e^{a+ibx} dx \right)$$

- Résolution d'une EDL1