

COLLE 10 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°4 — Propriété (Principe de superposition).

Soient a et b deux scalaires (deux éléments de $\mathbb{K}$), et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $c_1, \dots, c_n$ n fonctions dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Soient $f_1, \dots, f_n$ n fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ telles que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f_i est solution de (E_i) : $y'' + ay' + by = c_i$.

Alors pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\text{la fonction } \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \text{ est solution de l'équation différentielle } y'' + ay' + by = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i.$$

Preuve. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right)'' + a \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right)' + b \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i'' + a \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i' + b \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i'' + a f_i' + b f_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$$

la première égalité provenant de la linéarité de la dérivation, la seconde de la linéarité de la somme, et la dernière de l'hypothèse suivant laquelle f_i est solution de $y'' + ay' + by = c_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Ce qui signifie que φ est solution de l'EDL $y'' + ay' + by = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$, ce qu'il fallait démontrer.

QUESTION DE COURS N°1 — Propriété. Soient a, b et α trois scalaires. On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = e^{\alpha x}$; et on note encore (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E) .

Si α n'est pas racine de (EC) , alors l'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = K e^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{K}$.

Preuve. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, α n'est pas racine de (EC) . Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$.

Soit K un scalaire. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = K e^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $f_P'(x) = K \alpha e^{\alpha x}$ et $f_P''(x) = K \alpha^2 e^{\alpha x}$.

Ainsi, pour tout réel x on a : $f_P''(x) + a f_P'(x) + b f_P(x) = K e^{\alpha x} (\alpha^2 + a\alpha + b)$.

Puisque $e^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x , on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \iff [K (\alpha^2 + a\alpha + b) = 1] \iff \left[K = \frac{1}{\alpha^2 + a\alpha + b} \right]$$

La dernière égalité étant rendue légitime par le fait que α n'est pas racine de (EC) (donc $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$).

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = \frac{1}{\alpha^2 + a\alpha + b} e^{\alpha x}$, est solution de (E) .

QUESTION DE COURS N°2 — Propriété. Soient a, b et α trois scalaires. On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = e^{\alpha x}$; et on note encore (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E) .

Si α est racine simple de (EC) , alors l'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = K x e^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{K}$.

Preuve. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, α est racine simple de (EC) . Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a \neq 0$.

Soit K un scalaire. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = K x e^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $f_P'(x) = K e^{\alpha x} (\alpha x + 1)$ et $f_P''(x) = K e^{\alpha x} (\alpha^2 x + 2\alpha)$.

Ainsi, pour tout réel x on a : $f_P''(x) + a f_P'(x) + b f_P(x) = K e^{\alpha x} (\alpha^2 x + 2\alpha + a\alpha x + a + bx)$.

Puisque $e^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x , on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \iff \left[K \left(\underbrace{(\alpha^2 + a\alpha + b)}_{=0} x + 2\alpha + a \right) = 1 \right] \iff \left[K = \frac{1}{2\alpha + a} \right]$$

La dernière égalité étant rendue légitime par le fait que α est racine simple de (EC) (donc $2\alpha + a \neq 0$).

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = \frac{1}{2\alpha + a} x e^{\alpha x}$, est solution de (E) .

QUESTION DE COURS N°3 — **Propriété.** Soient a, b et α trois scalaires. On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = e^{\alpha x}$; et on note encore (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E) .

Si α est racine double de (EC) , alors l'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = Kx^2e^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{K}$.

Preuve. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, α est racine double de (EC) . Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a = 0$.

Soit K un scalaire. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = Kx^2e^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $f_P'(x) = Ke^{\alpha x}(\alpha x^2 + 2x)$ et $f_P''(x) = Ke^{\alpha x}(\alpha^2 x^2 + 4\alpha x + 2)$.

Ainsi, pour tout réel x on a : $f_P''(x) + af_P'(x) + bf_P(x) = Ke^{\alpha x}(\alpha^2 x^2 + 4\alpha x + 2 + a\alpha x^2 + 2ax + bx^2)$

$$\iff f_P''(x) + af_P'(x) + bf_P(x) = Ke^{\alpha x} \left[\left(\underbrace{\alpha^2 + a\alpha + b}_{=0} \right) x^2 + 2 \left(\underbrace{2\alpha + a}_{=0} \right) x + 2 \right]$$

Puisque $e^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x , on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \iff [2K = 1] \iff \left[K = \frac{1}{2} \right]$$

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = \frac{1}{2}x^2e^{\alpha x}$, est solution de (E) .

QUESTION DE COURS N°5 — **Physique-Maths.** Oscillateur harmonique libre, sans frottements (résolution de $y'' + \omega_0^2 y = 0$). Solution g^{ale} peut s'écrire $f_{K,\varphi}(t) = K \cos(\omega_0 t - \varphi)$

On suppose que $\omega_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et on note (H) l'équation différentielle linéaire du second ordre : $y'' + \omega_0^2 y = 0$. L'équation caractéristique associée possède deux racines complexes conjuguées $\pm i\omega_0$.*

On en déduit que la solution générale[†] est : $f(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$ (avec C_1 et C_2 réels).

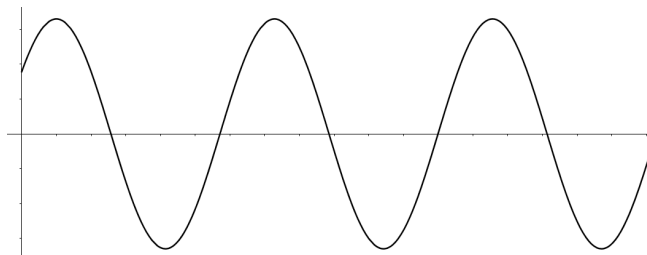
Fixons à présent les réels C_1 et C_2 , avec $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$. On a pour tout réel t :

$$f(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos(\omega_0 t) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin(\omega_0 t) \right) \quad \text{puis on pose : } X = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \text{ et } Y = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

Le couple de réels (X, Y) vérifie clairement la relation $X^2 + Y^2 = 1$. Par suite, le complexe $X + iY$ est un élément de $\mathbb{U}$, et il existe donc un unique réel $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que $X = \cos \varphi$ et $Y = \sin \varphi$. Par suite :

$$f(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} (\cos \varphi \cos(\omega_0 t) + \sin \varphi \sin(\omega_0 t)) \quad \text{d'où : } f_{C_1, C_2}(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Le cas $(C_1, C_2) = (0, 0)$ est trivial (prendre $K = 0$ et φ arbitraire).



Conclusion. La solution générale de (H) est : $\forall (t, K, \varphi) \in \mathbb{R}^3, f(t) = K \cos(\omega_0 t - \varphi)$ (régime périodique).

*. Qui sont effectivement distinctes puisque ω_0 est non nul par hypothèse.

†. C'est l'ensemble des fonctions solutions de (H) à valeurs réelles.

COMPLÉMENT — GÉOMÉTRIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Ce complément n'est donné qu'à titre d'information, et n'est pas exigible en colle. D'une certaine façon, il sert à préparer la suite du cours ; plus précisément, il illustre la notion d'**espace vectoriel** qui, pour faire très court, généralisera les notions de plan et d'espace usuels.

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan réel. L'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$:

$$\mathbb{R} \vec{u} = \{\lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

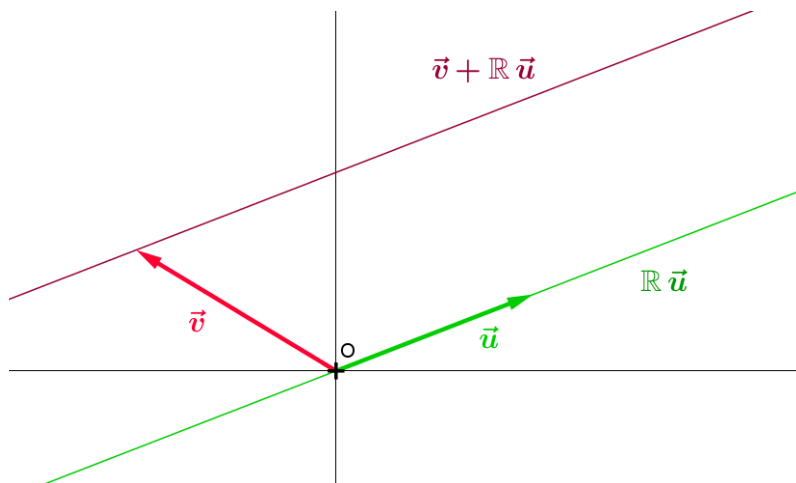
est une droite qui passe par l'origine du plan (on parle alors de droite *vectorielle*).

Considérons un second vecteur $\vec{v}$, non colinéaire à $\vec{u}$. L'image de $\mathbb{R} \vec{u}$ par la translation de vecteur $\vec{v}$ est une droite :

$$\vec{v} + \mathbb{R} \vec{u} = \{\vec{v} + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

qui bien évidemment ne passe plus par l'origine du plan (on parle alors de droite *affine*).

Ces considérations sont illustrées par le graphique ci-dessous.



Fin du premier acte.

Sous les hypothèses à présent usuelles, l'ensemble des solutions d'une EDL1 homogène ($ay' + by = 0$) est l'ensemble des fonctions colinéaires à e^{-A} , où A désigne une primitive de b/a . On peut donc noter cet ensemble :

$$\mathbb{R} e^{-A} = \{\lambda e^{-A}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

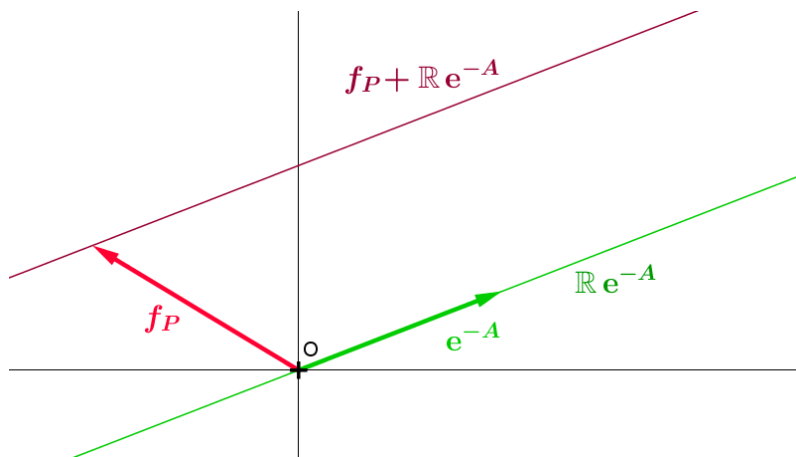
Par analogie avec la situation précédente, on dira que c'est une droite vectorielle (dans l'espace $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$).

Considérons à présent une solution particulière f_P de l'EDL1 $ay' + by = c$ (avec c non nulle). La fonction f_P est non colinéaire à e^{-A} (sinon elle serait solution de l'équation homogène). L'image de $\mathbb{R} e^{-A}$ par la translation de "vecteur" f_P

$$f_P + \mathbb{R} e^{-A} = \{f_P + \lambda e^{-A}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

est une droite affine (dans l'espace $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$).

Ces considérations sont illustrées par le graphique ci-dessous.



BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Une EDL1. Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad x y' + y = e^{-x} \cos(3x)$$

EXERCICE 2. — Physique-Maths. Oscillateur harmonique amorti :

résolution de $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ (avec m et $\omega_0 > 0$). Solution générale dans les trois cas.

EXERCICE 3. — Application du principe de superposition. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y'' - 3y' + 2y = 6\cosh(x)$.

EXERCICE 4. — Application du “pont $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{C}$ ”. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$

EXERCICE 5. — EDL1 et formule de Leibniz.* Soit f la fonction définie sur $I =]-1, 1[$ en posant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = (1+x)^\alpha \quad \text{où } \alpha \text{ désigne un réel non nul.}$$

1/ Justifier brièvement que f est solution de l'EDL1 : $(1+x)y' - \alpha y = 0$.

2/ En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k) f^{(k)}(0)$

3/ Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(k)}(0) = \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$

*** : sur le principe du volontariat. Un.e étudiant.e à qui l'on propose de faire cet exercice peut demander un autre exo de la banque, sans dévalorisation de sa note.**

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Une EDL1. Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad x y' + y = e^{-x} \cos(3x)$$

L'intervalle de résolution est donc $\mathbb{R}_+^*$ (imposé par l'énoncé) ; sur celui-ci, les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto 1$ et $x \mapsto e^{-x} \cos(3x)$ sont continues[‡] selon les théorèmes généraux, et la première ne s'annule pas.

► **Equation homogène associée.** Avec les notations du cours, on a pour tout réel $x > 0$:

$$a(x) = x; \quad b(x) = 1; \quad \text{d'où } \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1}{x}. \quad \text{On peut donc poser : } A(x) = \ln(x)$$

Conclusion. La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $\forall (x, K) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, f_K(x) = \frac{K}{x}$

► **Solution particulière de (E).** On peut rechercher une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_P(x) = \frac{K(x)}{x}$, où K désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. L'hypothèse faite sur K implique que f_P est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_P(x) = \frac{K'(x)x - K(x)}{x^2}$$

Par suite, f_P est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{K'(x)x^2 - xK(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x} = e^{-x} \cos(3x) \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, K'(x) = e^{-x} \cos(3x)$$

Or :

$$\int e^{-x} \cos(3x) dx = \operatorname{Re} \left(\int e^{(-1+3i)x} dx \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{-1+3i} e^{(-1+3i)x} \right) = \operatorname{Re} \left(-\frac{1+3i}{10} e^{-x} e^{3ix} \right)$$

$$\text{Finalement : } \int e^{-x} \cos(3x) dx = \frac{e^{-x}}{10} (3 \sin(3x) - \cos(3x)).$$

Une solution particulière de (E) est donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_P(x) = \frac{e^{-x}}{10x} (3 \sin(3x) - \cos(3x))$.

Conclusion. La solution générale de (E) est : $\forall (x, K) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, g_K(x) = \frac{e^{-x}}{10x} (3 \sin(3x) - \cos(3x)) + \frac{K}{x}$

EXERCICE 2. — Physique-Maths. Oscillateur harmonique amorti :

résolution de $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ (avec m et $\omega_0 > 0$). Solution générale dans les trois cas.

On considère l'EDL2 : (H) $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ avec m et ω_0 strictement positifs. L'équation caractéristique associée est : (EC) $r^2 + 2mr + \omega_0^2 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 4(m^2 - \omega_0^2)$.

On distingue alors trois cas :

► Si $\Delta < 0$ (càd si : $m < \omega_0$) : alors (EC) possède deux racines complexes conjuguées $-m \pm i\sqrt{\omega_0^2 - m^2}$. Dans ce cas ("frottements faibles"), la solution générale de (H) est :

$$\forall (t, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3, f(t) = \left(C_1 \cos \left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - m^2} \right) t \right) + C_2 \sin \left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - m^2} \right) t \right) \right) e^{-mt} \quad (\text{régime pseudo-périodique}).$$

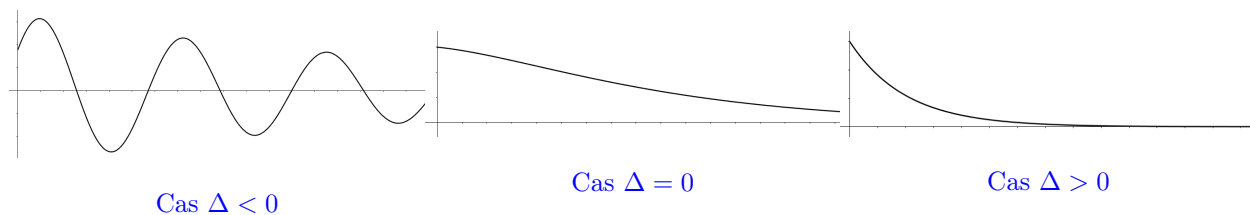
► Si $\Delta = 0$ (càd si : $m = \omega_0$) : alors (EC) possède une racine double (réelle) : $-m$. Dans ce cas, la solution générale de (H) est :

$$\forall (t, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3, f_{C_1, C_2}(t) = (C_1 t + C_2) e^{-mt} \quad (\text{régime critique}).$$

‡. Et même de classe $\mathcal{C}^\infty$.

► Si $\Delta > 0$ (càd si : $m > \omega_0$) : alors (EC) possède deux racines réelles (et strictement négatives) $r_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - \omega_0^2}$. Dans ce cas (“frottements importants”), la solution générale de (H) est :

$$\forall (t, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3, f_{C_1, C_2}(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \text{ (régime apériodique)}.$$



EXERCICE 3. — Application du principe de superposition. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y'' - 3y' + 2y = 6\text{ch}(x)$.

Notons que : $[y'' - 3y' + 2y = 6\text{ch}(x)] \iff [y'' - 3y' + 2y = 3e^x + 3e^{-x}]$

► Résolution de l'équation homogène associée : (H) $y'' - 3y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique a 1 et 2 comme racines. Par suite, la solution générale de (H) (à valeurs réelles) est :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad (\text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels}) \quad (\heartsuit)$$

► Recherche d'une solution particulière. On introduit l'équation $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$.

Puisque -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, (E_1) admet une solution particulière de la forme Ke^{-x} (avec K réel). Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = Ke^{-x}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), et on peut donc calculer ses dérivées successives. Pour tout réel x , on a clairement : $\varphi'(x) = -Ke^{-x}$ et $\varphi''(x) = Ke^{-x}$. Il s'ensuit que φ est solution de (E_1) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Ke^{-x}(1 + 3 + 2) = e^{-x} \iff K = \frac{1}{6}$$

On en déduit que la fonction : $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{6}e^{-x}$ est solution de (E_1) ($\spadesuit$).

On introduit à présent l'équation $(E_2) : y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Puisque 1 est racine simple de l'équation caractéristique, (E_2) admet une solution particulière de la forme Kxe^x (avec K réel). Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = Kxe^x$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$... Pour tout réel x , on a clairement : $\varphi'(x) = Ke^x(x + 1)$ et $\varphi''(x) = Ke^x(x + 2)$. Il s'ensuit que φ est solution de (E_2) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Ke^x(x + 2 - 3x - 3 + 2x) = e^x \iff K = -1$$

On en déduit que la fonction : $f : x \in \mathbb{R} \mapsto -xe^x$ est solution de (E_2) ($\clubsuit$).

► D'après ($\clubsuit$), ($\spadesuit$) et le principe de superposition, on peut affirmer que la fonction :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}e^{-x} - 3xe^x \text{ est solution de (E) } (\diamond)$$

► D'après ($\heartsuit$) et ($\diamond$), la solution générale de (E) est :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}e^{-x} - 3xe^x + C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad (\text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

EXERCICE 4. — Application du “pont” $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{C}$. Déterminer l’ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de

$$y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$$

► Résolution de l’équation homogène associée : (H) $y'' - 5y' + 6y = 0$. L’équation caractéristique a 2 et 3 comme racines. Par suite, la solution générale de (H) (à valeurs réelles) est :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \quad (\text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

► Recherche d’une solution particulière. On introduit l’équation $(E') : y'' - 5y' + 6y = e^{ix}$.

Puisque i n’est pas racine de l’équation caractéristique, (E') admet une solution particulière de la forme Ke^{ix} (avec K complexe). Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = Ke^{ix}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), et on peut donc calculer les dérivées successives de φ . Pour tout réel x , on a clairement : $\varphi'(x) = iKe^{ix}$ et $\varphi''(x) = -Ke^{ix}$. Il s’ensuit que φ est solution de (E') si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, -Ke^{ix} - 5iKe^{ix} + 6Ke^{ix} = e^{ix} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, (-1 - 5i + 6)Ke^{ix} = e^{ix} \iff K(5 - 5i) = 1 \iff K = \frac{1}{5 - 5i} \\ &\iff K = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}i \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i\right)e^{ix}$ est solution de (E') . Il ne reste plus qu’à en déterminer la partie réelle pour avoir une solution de (E) . Explicitement, la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{10}(\cos(x) - \sin(x))$$

est une solution particulière de (E) .

Conclusion. La solution générale de l’équation $(E) y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$ est

$$\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{10}(\cos(x) - \sin(x)) + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \quad (\text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

EXERCICE 5. — EDL1 et formule de Leibniz. Soit f la fonction définie sur $I =]-1, 1[$ en posant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = (1+x)^\alpha \quad \text{où } \alpha \text{ désigne un réel non nul.}$$

1/ Justifier brièvement que f est solution de l’EDL1 : $(1+x)y' - \alpha y = 0$.

Par hypothèse, f est dérivable sur I , et : $\forall x \in I, (1+x)f'(x) = (1+x)\alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha(1+x)^\alpha$

Il s’ensuit que : $\forall x \in I, (1+x)f'(x) = \alpha f(x)$. D’où la conclusion.

2/ En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k)f^{(k)}(0)$

Selon les TG, $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Soit k un entier naturel. En dérivant k fois la relation

$$\forall x \in I, (1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

on obtient :

$$\forall x \in I, (uf')^{(k)}(x) = \alpha f^{(k)}(x) \quad (\spadesuit) \quad \text{en ayant posé } u(x) = 1+x$$

Or selon la formule de Leibniz : $\forall x \in I, (uf')^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u^{(j)}(x) f'^{(k-j)}(x)$

En observant que $u^{(j)}$ est nulle pour tout entier $j \geq 2$, on en déduit que :

$$\forall x \in I, (uf')^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^1 \binom{k}{j} u^{(j)}(x) f'^{(k-j+1)}(x) = (1+x)f^{(k+1)}(x) + kf^{(k)}(x) \quad (\clubsuit)$$

D’après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\forall x \in I, (1+x)f^{(k+1)}(x) + kf^{(k)}(x) = \alpha f^{(k)}(x)$

En particulier : $f^{(k+1)}(0) + kf^{(k)}(0) = \alpha f^{(k)}(0)$. **Conclusion.** $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k)f^{(k)}(0)$

3/ Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(0) = \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$

Posons pour tout entier naturel non nul k l'assertion $P(k) : "f^{(k)}(0) = \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)"$

Pour $k = 1$, on a : $f'(0) = \alpha$ et $\prod_{j=0}^0 (\alpha - j) = \alpha$. Donc $P(1)$ est vraie.

Supposons $P(k)$ vraie pour un certain entier naturel non nul k . D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence on a :

$$f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k) \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) \quad \text{d'où :} \quad f^{(k+1)}(0) = \prod_{j=0}^k (\alpha - j)$$

Ce qui signifie que $P(k+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(0) = \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$