

Chapitre 9 : Équations différentielles linéaires

Convention : dans ce chapitre, I est un intervalle non-vide de \mathbb{R} .

Méthode “universelle” de résolution pour une EDL 1 ou 2 :

- (i) Résolution de l’équation homogène (H) associée à (E)
- (ii) Détermination d’une solution particulière de (E)
- (iii) Conclusion : la solution générale de (E) est $S_H + S_P$ où S_H désigne la solution générale de (H) et S_P une solution particulière de (E).

1 – Équations différentielles linéaires d’ordre 1 (EDL1)

Cf programme de colle 9.

2 – Équations différentielles linéaires d’ordre 2 (EDL2)

Dans ce paragraphe, on suppose que les coefficients de l’EDL2 sont constants, c'est-à-dire que l'on considérera l'équation

$$(E) \quad y'' + ay' + by = c(x), \text{ avec } a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{K}, \text{ et } c \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K}).$$

(i) La solution pour le premier point est donnée par les deux énoncés suivants :

Théorème (solution générale d’une EDL2 homogène, cas complexe).

Mêmes notations que ci-dessus (avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ possède :

- une racine double α_0 ($\Delta = 0$) : les solutions de (H) sont les fonctions $f_{C_1, C_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par : $f_{C_1, C_2}(t) = (C_1 t + C_2) e^{\alpha_0 t}$ (C_1 et C_2 complexes)
- deux racines distinctes α et β ($\Delta \neq 0$) : les solutions de (H) sont les fonctions $f_{C_1, C_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par : $f_{C_1, C_2}(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$ (C_1 et C_2 complexes)

Théorème (solution générale d’une EDL2 homogène, cas réel). Mêmes notations que précédemment. Si l'équation caractéristique possède :

- deux racines réelles α et β ($\Delta > 0$) : les solutions de (H) sont les fonctions $f_{C_1, C_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par : $f_{C_1, C_2}(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$ (C_1 et C_2 réels)
- une racine double α_0 ($\Delta = 0$) : les solutions de (H) sont les fonctions $f_{C_1, C_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par : $f_{C_1, C_2}(t) = (C_1 t + C_2) e^{\alpha_0 t}$ (C_1 et C_2 réels)

► deux racines complexes conjuguées $\alpha = u + iv$ et $\beta = u - iv$ ($\Delta < 0$) : les solutions de (H) sont les fonctions $f_{C_1, C_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par : $f_{C_1, C_2}(t) = e^{ut} (C_1 \cos(vt) + C_2 \sin(vt))$ (C_1 et C_2 réels).

(ii) Et pour le second point (recherche d'une solution particulière de (E)), on se restreint à la recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est de la forme $e^{\alpha x}$.

Propriété (solution particulière d’une EDL2). Soient a , b et α trois scalaires (3 éléments de \mathbb{K}). Notons (E) $y'' + ay' + by = e^{\alpha x}$. Si le scalaire α ...

- n'est pas racine de l'équation caractéristique : alors (E) admet une solution particulière de la forme $Ke^{\alpha x}$ (avec $K \in \mathbb{K}$);
- est racine de l'équation caractéristique, mais pas racine double ($\Delta \neq 0$) : alors (E) admet une solution particulière de la forme $Kxe^{\alpha x}$ (avec $K \in \mathbb{K}$);
- est racine double de l'équation caractéristique ($\Delta = 0$) : alors (E) admet une solution particulière de la forme $Kx^2 e^{\alpha x}$ (avec $K \in \mathbb{K}$).

Propriété (principe de superposition des solutions particulières). Soient a , b deux scalaires ; $(c_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ n fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{K} , et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Pour tout entier i compris entre 1 et n , on note

$$(E_i) : \quad y'' + ay' + by = c_i$$

On suppose encore que f_1, \dots, f_n sont n fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur I , telles que f_i est solution de (E_i) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \text{ est solution de l'EDL : (E)} \quad y'' + ay' + by = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$$

Application : résolution de $y'' - 3y' + 2y = 4\text{ch}(x)$.

Propriété (“Pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$ ” pour les EDL). Soient a et b deux réels.

Soient $c \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors :

[φ est solution de $y'' + ay' + by = c$]

$$\iff \begin{cases} \text{Re}(\varphi) \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \text{Re}(c) \\ \text{Im}(\varphi) \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \text{Im}(c) \end{cases}$$

Application : résolution de $y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$.

3 – Exemple d'application : l'oscillateur harmonique $y'' + 2my' + \omega_0^2y = \dots$

► EDL de l'oscillateur harmonique libre

On considère ici l'équation $y'' + 2my' + \omega_0^2y = 0$ avec $m > 0$.

Trois cas sont à distinguer : $m < \omega_0$, $m = \omega_0$, ou $m > \omega_0$. ► EDL de l'oscillateur

harmonique forcé

On considère ici l'équation $y'' + 2my' + \omega_0^2y = A \cos(\omega t)$ avec $A > 0$ et $\omega > 0$.

Par rapport à l'étude précédente, outre le fait que l'on doit trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, on doit distinguer un nouveau sous-cas : celui où $m = 0$ et $\omega = \omega_0$ (résonance).

QUESTIONS DE COURS

- **Propriété** : solution particulière d'une EDL2 avec second membre de la forme $e^{\alpha x}$, avec α non racine de l'équation caractéristique.
- **Propriété** : solution particulière d'une EDL2 avec second membre de la forme $e^{\alpha x}$, avec α racine simple de l'équation caractéristique.

- **Propriété** : solution particulière d'une EDL2 avec second membre de la forme $e^{\alpha x}$, avec α racine double de l'équation caractéristique.
- **Propriété (principe de superposition des solutions particulières)**.
- **Physique-Maths.** Oscillateur harmonique libre, sans frottements (résolution de $y'' + \omega_0^2y = 0$). Solution g^{ale} peut s'écrire $f_{K,\varphi}(t) = K \cos(\omega_0 t - \varphi)$.

OBJECTIFS DE LA SEMAINE

- Connaître le plan et la méthode de résolution d'une EDL1 (en particulier la méthode de variation de la constante)
- Déterminer la primitive d'une fonction (primitives usuelles, IPP, changement de variable)

- Connaître le plan et la méthode de résolution d'une EDL2 (en particulier les différentes techniques de recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre)
- Afin de maîtriser les 3 points précédents : vous entraîner, vous entraîner, vous entraîner (par exemple en refaisant les calculs de primitives, et les résolutions d'EDL1 et 2 du cours).