

COLLE 11 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — **Propriété.** Soit p un entier naturel ≥ 2 . On définit une relation binaire sur $\mathbb{N}$ appelée **relation de congruence modulo p** et notée $\equiv$ en posant

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \equiv m [p] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, n = m + kp$$

Cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'équivalence : réflexivité, symétrie, transitivité.

Soit p un entier naturel ≥ 2 .

► **Réflexivité.** Soit n un entier. On peut observer que : $n = n + 0 \times p$. Donc : $n \equiv n [p]$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{Z}, n \equiv n [p]$. La relation de congruence modulo p est réflexive.

► **Symétrie.** Soient n et m deux entiers. Supposons que : $n \equiv m [p]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = m + kp$.

Donc : $m = n + (-k)p$. Puisque $(-k) \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $m \equiv n [p]$.

Ainsi : $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, (n \equiv m [p]) \implies (m \equiv n [p])$. La relation de congruence modulo p est symétrique.

► **Transitivité.** Soient n, m et q trois entiers. Supposons que : $n \equiv m [p]$ et $m \equiv q [p]$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que : $n = m + kp$ et $m = q + k'p$.

Donc : $n = q + k'p + kp = q + (k + k')p$. Puisque $(k + k') \in \mathbb{Z}$, on en déduit que : $n \equiv q [p]$.

Ainsi : $\forall (n, m, q) \in \mathbb{Z}^3, (n \equiv m [p] \text{ et } m \equiv q [p]) \implies (n \equiv q [p])$. La relation de congruence modulo p est transitive.

Conclusion. La relation de congruence modulo p est une relation binaire sur $\mathbb{Z}$ réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

QUESTION DE COURS N°2 — **Propriété.** La relation de divisibilité est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$, non totale.

Dans un 1er temps, il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'ordre : réflexivité, antisymétrie, transitivité.

On rappelle qu'un entier naturel n divise un entier naturel m (notation : $n|m$) s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $m = kn$.

► **Réflexivité.** Soit n un entier naturel. On peut observer que : $n = 1 \times n$. Donc : $n|n$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, n|n$. La relation de divisibilité est réflexive.

► **Transitivité.** Soient n, m et q trois entiers naturels. Supposons que : $n|m$ et $m|q$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que : $m = kn$ et $q = k'm$.

Donc : $q = (kk')n$. Puisque $(kk') \in \mathbb{N}$, on en déduit que : $n|q$.

Ainsi : $\forall (n, m, q) \in \mathbb{N}^3, (n|m \text{ et } m|q) \implies (n|q)$. La relation de divisibilité est transitive.

► **Antisymétrie.** Soient n et m deux entiers naturels. Supposons que : $n|m$ et $m|n$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que : $m = kn$ et $n = k'm$.

On en déduit que : $n = kk'n \iff n(1 - kk') = 0$. Deux cas peuvent alors se présenter :

► 1er cas : $n = 0$. Alors $m = 0$ (puisque $m = kn$), donc $m = n$.

► 2ème cas : $n \neq 0$. Alors $1 - kk' = 0$, donc $kk' = 1$. Puisque k et k' sont des entiers naturels, ceci implique $k = k' = 1$. On en déduit que $m = n$ (et $n = m$, ah, ah, ah!).

Ainsi : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, [(n|m \text{ et } m|n)] \implies (n = m)$. La relation de divisibilité est antisymétrique.

Conclusion. La relation de divisibilité est une relation binaire sur $\mathbb{N}$ réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$.

En outre, cette **relation d'ordre n'est pas totale**, car (par exemple) 2 ne divise pas 3, et 3 ne divise pas 2.

QUESTION DE COURS N°3 — Propriété. Pour tout réel x , la suite de terme général $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est croissante et majorée par x .

Pour information, le nombre u_n de l'énoncé est un décimal, qui est l'approximation décimale à 10^{-n} près par défaut du réel x .

Pour tout entier naturel n , on a : $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$ (propriété de la partie entière), d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x$

La suite (u_n) est donc majorée par x .

Pour tout entier naturel n , on a également : $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x \Rightarrow 10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1} x$. Par croissance de la partie entière, on en déduit que : $10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor$.

En divisant les deux termes de cette inégalité par 10^{n+1} , on obtient : $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor}{10^{n+1}}$, soit $u_n \leq u_{n+1}$.

On a ainsi prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$. Ainsi : la suite (u_n) est croissante.

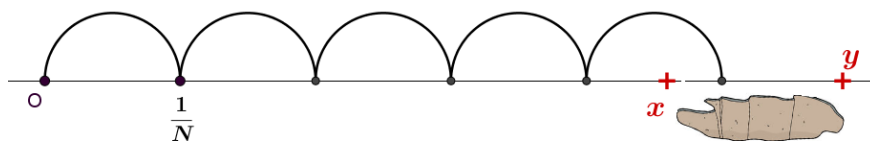
QUESTION DE COURS 4 - "SUPERSTAR" — Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Il s'agit de prouver qu'il existe un nombre rationnel entre deux réels distincts. Considérons deux réels x et y , tels que $x < y$.

► Si $x < 0$ et $y > 0$: alors 0 (qui est rationnel!) est compris entre x et y .

► Si $0 \leq x < y$: puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel non nul N tel que : $N(y - x) > 1$ et il existe un entier naturel M tel que $M/N > x$.

Remarque : la figure ci-dessous illustre ces choix, dont on explique ici l'origine très informellement.



Entre x et y , il y a un trou, de longueur $y - x$. Pour être certain de tomber dans ce trou en partant de zéro, on doit s'assurer de deux conditions : ne pas faire des pas trop longs (sinon on pourrait passer au-dessus du trou), et en faire suffisamment.

Pour remplir la première, on choisit de faire des pas de longueur $1/N$ (qui est rationnel), de telle sorte que : $1/N < (y - x)$ (longueur d'un pas < longueur du trou). Ce qui équivaut à : $N(y - x) > 1$.

Pour remplir la seconde, on observe qu'il faut au moins dépasser x pour tomber dans le trou. Or, $\mathbb{R}$ étant archimédien, quitte à faire assez de pas de longueur $1/N$, on dépassera x . Càd : il existe un entier M assez grand pour que $M \times (1/N) > x$.

Considérons l'ensemble : $E = \left\{ k \in \mathbb{N}, \frac{k}{N} \leq x \right\}$. Cet ensemble est non vide, puisque 0 y appartient. En outre, pour tout élément k de E , on a : $(k/N) \leq x < (M/N)$ d'où en particulier $k < M$. Donc E est majoré (par M).

En résumé : E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide et majorée. A ce titre elle admet un plus grand élément : $N_0 = \max E$.

On a alors : $N_0 \in E$ et $N_0 + 1 \notin E$ (sinon N_0 ne serait pas le plus grand élément!). D'où : $\frac{N_0}{N} \leq x < \frac{N_0 + 1}{N}$ (♠).

Par ailleurs, puisque $N(y - x) > 1$, on a : $y > x + \frac{1}{N}$. On déduit de cette inégalité et de $\frac{N_0}{N} \leq x$ que : $\frac{N_0 + 1}{N} < y$ (♣).

On déduit de (♠) et de (♣) que : $x < \frac{N_0 + 1}{N} < y$, ce qui prouve l'existence d'un rationnel entre x et y .

► Si $x < y \leq 0$: posons $X = -x$ et $Y = -y$. D'après ce que nous venons d'établir plus haut, il existe un rationnel r tel que : $Y < r < X$. Donc $x < -r < y$, d'où la conclusion puisque l'opposé d'un rationnel est encore un rationnel.

Synthèse : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y$ ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

Montrer que $(J_n)_n$ est positive.

EXERCICE 2. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

Montrer que $(J_n)_n$ est décroissante.

EXERCICE 3. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t) dt$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \geq \frac{1}{4^n} \times \frac{\pi}{3}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$

EXERCICE 4. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

EXERCICE 5. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$

EXERCICE 6. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x) dx$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

Montrer que $(J_n)_n$ est positive.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $x \in [0, 1]$ on a :

$$\frac{x^n}{1+x} \geq 0$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \geq 0$$

On a ainsi prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \geq 0$. **Conclusion.** La suite (J_n) est positive.

EXERCICE 2. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

Montrer que $(J_n)_n$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que :

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx$$

Or, pour tout réel $x \in [0, 1]$ on a : $\frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx \leq 0$

On a ainsi prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} - J_n \leq 0$. **Conclusion.** La suite (J_n) est décroissante.

EXERCICE 3. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t) dt$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \geq \frac{1}{4^n} \times \frac{\pi}{3}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Selon le cours, on a : $\forall t \in [0, \pi/3], \cos(t) \geq \frac{1}{2}$ Il s'ensuit que : $\forall t \in [0, \pi/3], \cos^{2n}(t) \geq \frac{1}{2^{2n}}$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t) dt \geq \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2^{2n}} dt$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t) dt \geq \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{4^n}$

Par ailleurs, d'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a pour tout entier naturel n :

$$\underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt}_{=I_n} = \int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t) dt + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt$$

Or $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt$ est positive, par positivité de l'intégrale. On en déduit donc que :

$$I_n \geq \int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t) dt \implies I_n \geq \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{4^n} \implies I_n > 0$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$

EXERCICE 4. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $x \in [0, 1]$, on a : $0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \implies 0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \implies 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

On a ainsi prouvé que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on déduit de l'encadrement précédent et du théorème des gendarmes que la suite (I_n) converge vers 0.

Conclusion. $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

EXERCICE 5. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$

Pour tout entier naturel n , on a par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2} dx$$

d'où :

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n (x^2 + 2x + 1)}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n (x+1)^2}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$

EXERCICE 6. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x) dx$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos^{2n+1}(t) dt$ *

Posons : $\forall t \in [0, \pi/2], \begin{cases} u(t) = \sin(t) \\ v(t) = \cos^{2n+1}(t) \end{cases}$ de telle sorte que : $\forall t \in [0, \pi/2], \begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = -(2n+1) \sin(t) \cos^{2n}(t) \end{cases}$

Selon la formule d'intégration par parties (u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$) :

$$I_{n+1} = \underbrace{[\sin(t) \cos^{2n+1}(t)]_0^{\pi/2}}_{=0} + (2n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^{2n}(t) dt$$

D'où : $I_{n+1} = (2n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \cos^{2n}(t) dt = (2n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt - (2n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(t) dt$

C'est-à-dire : $I_{n+1} = (2n+1) I_n - (2n+1) I_{n+1}$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$

*. On aura au passage observé que : $2(n+1) = 2n+2$