

EXERCICES 11 – SUITES RÉELLES ET COMPLEXES – CORRIGÉ

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES RÉELLES

EXERCICE 1. — (Limites “usuelles”). Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants, si elle existe :

$$\begin{array}{l} 1/ \ u_n = \frac{\sin(n)}{n+1} \\ 2/ \ u_n = \sqrt[n]{n^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3/ \ u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n} \\ 4/ \ u_n = \frac{n^4 - 3n^3 + 2n - 5}{4n^2 + n + 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5/ \ u_n = \frac{e^n - n^2}{2e^n - 3n + 1} \\ 6/ \ u_n = e^{-2n} \cos(n) \end{array}$$

1/ (u_n) est le produit de la suite de terme général $\sin(n)$, qui est bornée, par celle de terme général $1/(n+1)$, qui est de limite nulle.

Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Alternative : on peut également utiliser le théorème des gendarmes pour conclure.

2/ Pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n = \sqrt[n]{n^2} = (n^2)^{1/n} = e^{\ln(n^2)/n} = e^{2\ln(n)/n}$$

Par croissances comparées : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$.

3/ Pour tout entier naturel n non nul on a : $1 \leq 2 + (-1)^n \leq 3$.

Par croissance de la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{1/n}$, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq \sqrt[n]{2 + (-1)^n} \leq \sqrt[3]{3}$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(3)/n} = 1$.

Grâce à cette observation, à l'encadrement précédent et au théorème des gendarmes, on peut conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2 + (-1)^n} = 1$$

4/ Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{n^4 - 3n^3 + 2n - 5}{4n^2 + n + 1} = \frac{n^4}{4n^2} \times \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{5}{n^4}}{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}} = \frac{n^2}{4} \times \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{5}{n^4}}{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}}$$

Puisqu'il est clair que la fraction a pour limite 1 (le numérateur et le dénominateur tendent vers 1), on peut affirmer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{4}$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 - 3n^3 + 2n - 5}{4n^2 + n + 1} = +\infty$.

5/ Même principe que dans la question précédente. Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{e^n - n^2}{2e^n - 3n + 1} = \frac{e^n}{e^n} \times \frac{1 - n^2e^{-n}}{2 - 3ne^{-n} + e^{-n}} = \frac{1 - n^2e^{-n}}{2 - 3ne^{-n} + e^{-n}}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2e^{-n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} ne^{-n} = 0 \text{ (par croissances comparées)}$$

$$\text{Par suite : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - n^2}{2e^n - 3n + 1} = \frac{1}{2}.$$

6/ (u_n) est le produit de la suite de terme général $\cos(n)$, qui est bornée, par celle de terme général e^{-2n} , qui est de limite nulle.

Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} \cos(n) = 0$.

EXERCICE 2. — **(Retour à la définition).** Montrer que la suite de terme général e^n tend vers $+\infty$.¹

On peut déjà observer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^n \geq 1$.

Cette remarque faite, considérons un réel M strictement supérieur ou égal à 1.

On a : $e^n \geq M \iff n \geq \ln(M) \iff n \geq \lfloor \ln(M) \rfloor + 1$

En d'autres termes, il existe un entier n_0 ($n_0 = \lfloor \ln(M) \rfloor + 1$) à partir duquel tous les termes de la suite de terme général e^n sont supérieurs à M :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies e^n \geq M$$

Le raisonnement étant valable pour un réel M arbitraire, on a établi que :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies e^n \geq M$$

Ce qui signifie que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$.

Remarque. La démo précédente permet également de prouver que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$ (il suffit de prendre $n_0 = \lfloor e^M \rfloor + 1$);
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ (il suffit de prendre $n_0 = \lfloor M^{1/3} \rfloor + 1$);
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ (il suffit de prendre $n_0 = \lfloor M^2 \rfloor + 1$).

1. Cet exercice, dont le but est de vous faire utiliser la définition théorique de limite, peut être décliné de multiples façons en remplaçant la fonction exponentielle par la fonction carrée, ou racine cubique, ou logarithme népérien...

EXERCICE 3. — On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 t^n \sin(t) dt$.

1/ Justifier que (u_n) est une suite positive, puis montrer qu'elle décroissante.

La fonction $t \mapsto t^n \sin(t)$ est positive sur $[0, 1]$. Par positivité de l'intégrale : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

De plus, pour tout entier naturel n , on a par linéarité de l'intégrale :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 t^{n+1} \sin(t) - t^n \sin(t) dt = \int_0^1 \underbrace{(t-1)}_{\leq 0} \underbrace{t^n \sin(t)}_{\geq 0} dt$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $\int_0^1 (t-1) t^n \sin(t) dt \leq 0$.

L'entier n étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on a établi que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Ainsi la suite u est décroissante.

2/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (u_n) .

Soit n un entier naturel.

Pour tout réel t de $[0, 1]$, on a : $0 \leq \sin(t) \leq 1$. D'où : $0 \leq t^n \sin(t) \leq t^n$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$0 \leq \int_0^1 t^n \sin(t) dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

EXERCICE 4. — Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_0^1 (t-1)^{2n+3} \arctan(t) dt$ converge et préciser sa limite.

Soit n un entier naturel.

Pour tout réel t de $[0, 1]$, on a : $0 \leq \arctan(t) \leq \frac{\pi}{2}$. D'où : $0 \leq (t-1)^{2n+3} \arctan(t) \leq \frac{\pi}{2} (t-1)^{2n+3}$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$0 \leq \int_0^1 (t-1)^{2n+3} \arctan(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \int_0^1 (t-1)^{2n+3} dt$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2n+4}$.

D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

EXERCICE 5. — Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_0^1 \sin^n(t)e^{-t/2} dt$ converge et préciser sa limite.

Soit n un entier naturel.

Pour tout réel t de $[0, 1]$, on a : $0 \leq \sin(t) \leq t$, et $0 \leq e^{-t/2} \leq 1$. D'où : $0 \leq \sin^n(t)e^{-t/2} \leq t^n$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$0 \leq \int_0^1 \sin^n(t)e^{-t/2} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

EXERCICE 6. — (Suites de sommes partielles : un pas vers les séries numériques) — Déterminer la limite de la suite (S_n) dans chacun des cas suivants, si elle existe :

$$\left| \begin{array}{l} 1/ \ S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \\ 2/ \ S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \\ 3/ \ S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ 4/ \ S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \end{array} \right.$$

1/ Pour tout entier naturel n non nul, on a : $S_n \geq \sqrt{n}$. Par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

2/ Pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, on a : $S_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = +\infty$ (série harmonique).

Par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

3/ Pour tout entier naturel n non nul, on a : $S_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$.

Par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

4/ Soit n un entier naturel non nul. Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $0 \leq \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

On en déduit que :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2}$$

Par suite :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{1}{n}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} = 0$

EXERCICE 7. — (Limites et DL1). Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants, si elle existe :

$$1/ \ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \left| \quad 2/ \ u_n = n \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \left| \quad 3/ \ (*) \quad u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}\right.$$

1/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$ (♠).

Par ailleurs : $\forall h > -1$, $\ln(1 + h) = h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

En posant $h = 1/n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), le réel h tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et il s'ensuit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon \left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

D'où pour tout entier naturel n non nul : $n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \varepsilon \left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon \left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ (♡).

On déduit de (♠) et (♡) que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

2/ En utilisant le même DL que dans la question précédente, on peut affirmer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon \left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

D'où pour tout entier naturel n non nul : $n \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon \left(\frac{1}{n^2}\right)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$.

Par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 0$.

2. Vous avez reconnu une question de cours de la colle 4 !

3/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_n = \frac{e^{\sqrt{n+1} \ln(n)}}{e^{\sqrt{n} \ln(n+1)}} = \exp \left(\sqrt{n+1} \ln(n) - \sqrt{n} \ln(n+1) \right) \quad (\spadesuit)$$

Or :

$$\sqrt{n+1} \ln(n) - \sqrt{n} \ln(n+1) = \sqrt{n} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \ln(n) - \ln(n+1) \right] = \sqrt{n} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \ln(n) - \ln(n) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

On en déduit, à grands renforts de DL :

$$\sqrt{n+1} \ln(n) - \sqrt{n} \ln(n+1) = \sqrt{n} \left[\frac{\ln(n)}{2n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) \right] \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

Par suite :

$$\sqrt{n+1} \ln(n) - \sqrt{n} \ln(n+1) = \frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} \ln(n) - \sqrt{n} \ln(n+1) = 0$.

$$\text{En conclusion : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}} = 1$$

EXERCICE 8. — On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \arctan(x)$ où x est un réel arbitraire. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Par construction, la suite u est géométrique de raison $\frac{\arctan(x)}{2}$.

Or : $\left| \frac{\arctan(x)}{2} \right| < \frac{\pi}{4}$. En particulier : $\left| \frac{\arctan(x)}{2} \right| < 1$. Par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 9. — Comparer les trois limites suivantes :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right] \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

► Calcul de $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right]$.

L'entier m étant fixé, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1^m = 1$.

D'où : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right] = 1$.

► Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right]$.

L'entier n (non nul) étant fixé, on a : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m = 0$.

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right] = 0$.

► Enfin : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.³

SUITES ADJACENTES

EXERCICE 10. — On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1/ Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante, et que $(v_n)_n$ est croissante.

Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

D'où :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2n+1)n + (2n+2)n - (2n+1)(2n+2)}{(2n+2)(2n+1)n} = \frac{-3n-2}{(2n+2)(2n+1)n}$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n < 0$. La suite u est donc (strictement) décroissante.

Par ailleurs :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

D'après les calculs précédents, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-3n-2}{(2n+2)(2n+1)n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{-3n-2 + (2n+2)(2n+1) - 2n(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)n}$$

D'où :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n}{(2n+2)(2n+1)n} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n > 0$. La suite v est donc (strictement) croissante.

2/ Calculer $u_n - v_n$ pour tout entier naturel n . Conclure.

Pour tout entier naturel non nul n on a : $u_n - v_n = \frac{1}{n}$.

Ainsi, les suites u et v sont monotones de monotonie opposée, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Les suites u et v sont donc adjacentes. A ce titre, elles sont toutes les deux convergentes, vers une limite commune.

3. Voir question 1 de l'exercice 7.

EXERCICE 11. — (IRRATIONALITÉ DE e)

On pose pour tout entier naturel n : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$

1/ Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune, que nous noterons ℓ .

Il est clair que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est (strictement) croissante.

Par ailleurs, pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) \times (n+1)!} = -\frac{1}{n(n+1) \times (n+1)!} \end{aligned}$$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n < 0$. La suite (v_n) est donc (strictement) décroissante.

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Conclusion. Il résulte de ce qui précède que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. D'après le théorème du même nom, elles convergent donc vers une limite commune.

2/ On admet dans cette question que $\ell = e$.⁴

a) Justifier brièvement que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < e < v_n$.

D'après ce qui précède, la suite (u_n) est strictement croissante et converge vers e . D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < e$.

D'après ce qui précède (bis !), la suite (v_n) est strictement décroissante et converge vers e . D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > e$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < e < v_n$.

b) Montrer que e est irrationnel.

Raisonnons par l'absurde en supposant que e est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels⁵ m et p (avec $p \neq 0$) tels que : $e = \frac{m}{p}$.

D'après ce qui précède, on a : $u_p < e < v_p$. En d'autres termes :

$$\sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} < \frac{m}{p} < \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} + \frac{1}{p \times p!}$$

4. Résultat déjà établi cette année, et ayant fait l'objet d'une question de cours récente.

5. On sait en effet que $e \geq 0$, en tant que limite de suites à termes positifs.

On en déduit que :

$$p \times p! \times \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} < m \times p! < p \times p! \times \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} + 1$$

Notons $N_0 = p \times p! \times \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!}$. On a : $N_0 = p \times \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!}$. Pour tout entier k compris entre 0 et p , l'entier $p!$ est un multiple de $k!$, donc le rapport $\frac{p!}{k!}$ est un entier naturel. D'où N_0 est un entier naturel.

On a donc obtenu l'encadrement : $N_0 < m \times p! < N_0 + 1$. Il en résulte que $m \times p!$ est un entier naturel strictement compris entre deux entiers naturels consécutifs, ce qui est absurde.

Conclusion. e est irrationnel ($e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

SUITES EXTRAITES

EXERCICE 12. — Etablir que la suite de terme général $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ n'a pas de limite.

Pour tout entier naturel n , on note : $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

La suite extraite (u_{3n}) converge vers 0,⁶ et la suite extraite (u_{6n+1}) converge vers $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'après la propriété fondamentale des suites extraites⁷, la suite de terme général $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ n'a pas de limite.

EXERCICE 13. — Etablir que la suite de terme général $\cos(n)$ n'a pas de limite.

La preuve est un peu plus astucieuse que précédemment. Pour le détail de celle-ci, voir pdf du cours, page 249, exemple 2.

EXERCICE 14. — Etablir que la suite (complexe) de terme général i^n n'a pas de limite.

Pour tout entier naturel n , on note : $u_n = i^n$.

La suite extraite (u_{4n}) converge vers 1, et la suite extraite (u_{4n+1}) converge vers i .

D'après la propriété fondamentale des suites extraites, la suite de terme général i^n n'a pas de limite.

6. Puisqu'elle est constante égale à 0

7. La **propriété fondamentale des suites extraites** affirme que si u est une suite convergente de limite ℓ , alors toute suite extraite de u converge vers ℓ . On utilise ici la contraposée de cette implication : en exhibant deux suites extraites qui ne convergent pas vers la même limite, on peut affirmer que la suite u n'est pas convergente.

SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES ET RÉCURRENTES LINÉAIRES

EXERCICE 15. — Donner l'expression du terme général, et la limite de la suite récurrente réelle (u_n) donnée par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Le calcul rapide des premiers termes ($u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7$) permet de conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$.

Une récurrence immédiate permet de valider cette conjecture, et de conclure que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

EXERCICE 16. — Donner l'expression du terme général, et la limite de la suite récurrente réelle (u_n) donnée par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$.

Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite ℓ est telle que : $\ell = \frac{\ell + 1}{2} \iff \ell = 1$.

Cette observation conduit à introduire la suite auxiliaire v de terme général : $v_n = u_n - 1$.

Pour tout entier naturel n , on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 1}{2} - 1 = \frac{u_n - 1}{2} = \frac{1}{2}(u_n - 1) = \frac{1}{2}v_n$$

La suite v est géométrique de raison $1/2$. De plus, son premier terme est : $v_0 = u_0 - 1 = -1$. Il s'ensuit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -\frac{1}{2^n}$$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. En particulier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 17. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1, u_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 4r + 4 = 0 \iff (r - 2)^2 = 0$.

D'après le cours, le terme général de (u_n) est donc :

$$u_n = (\lambda + \mu n) 2^n$$

où λ et μ désignent deux réels à déterminer grâce aux conditions initiales. Explicitement :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ 2(1 + \mu) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1 - n) 2^n$.

EXERCICE 18. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$$

L'équation caractéristique associée est : $2r^2 - 3r + 1 = 0 \iff 2(r-1)\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0$.

D'après le cours, le terme général de (u_n) est donc :

$$u_n = \lambda \times 1^n + \mu \times \frac{1}{2^n} = \lambda + \frac{\mu}{2^n}$$

où λ et μ désignent deux réels à déterminer grâce aux conditions initiales. Explicitement :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + \frac{\mu}{2} = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -3 \\ \mu = 4 \end{cases}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -3 + \frac{4}{2^n} (= -3 + 2^{2-n})$.

EXERCICE 19. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - r + 1 = 0$. Celle-ci possède deux racines complexes conjuguées :

$$\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{càd} \quad e^{\pm i\pi/3}$$

D'après le cours, le terme général de (u_n) est donc :

$$u_n = \lambda \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

où λ et μ désignent deux réels à déterminer grâce aux conditions initiales. Explicitement :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \frac{1}{2} + \mu \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \sqrt{3} \end{cases}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$.

EXERCICE 20. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4i$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - (3 - 2i)r + (5 - 5i) = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = (3 - 2i)^2 - 4(5 - 5i) = 5 - 12i - 20 + 20i = -15 + 8i$.

Posons : $\delta = a + ib$ (avec a et b réels). On a :

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ 2ab = 8 \\ a^2 + b^2 = 17 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ 2ab = 8 \iff \delta = \pm(1 + 4i) \\ b = \pm 4 \end{cases}$$

On en déduit que les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = \frac{3 - 2i + 1 + 4i}{2} = 2 + i \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{3 - 2i - 1 - 4i}{2} = 1 - 3i$$

D'après le cours, le terme général de (u_n) est donc :

$$u_n = \lambda(2 + i)^n + \mu(1 - 3i)^n$$

Les valeurs de u_0 et u_1 permettent d'obtenir : $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (2 + i)^n - (1 - 3i)^n$

CROISSANCES COMPARÉES

EXERCICE 21. — (And the winner is...) Soient r un réel, et $\alpha > 0$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{n^\alpha}$

Soit r un nombre réel.

► Si $r = 0$: on a évidemment : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{n^\alpha} = 0$.

► Sinon : pour tout entier naturel n , on a : $\left| \frac{r^n}{n^\alpha} \right| = e^{n \ln|r| - \alpha \ln(n)} = e^{n(\ln|r| - \alpha \ln(n)/n)}$

Par croissances comparées, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln|r| - \alpha \ln(n)/n) = \ln|r|$.

Par suite, si $|r| \leq 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{n^\alpha} = 0$.

Si $r > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{n^\alpha} = +\infty$.

Enfin si $r < -1$, alors $\frac{r^n}{n^\alpha}$ n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$ (sa valeur absolue tend vers $+\infty$, mais les termes de cette suite sont de signes alternés).

EXERCICE 22. — (And the winner is... bis) Soit r un réel. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{n!}$

Soit r un nombre réel.

► Si $r = 0$: la propriété est triviale.

► Si $r \in \mathbb{R}_+^*$: il existe un entier n_0 tel que $n_0 > r$. Considérons alors n un entier $> n_0$.

$$\text{On a : } \frac{r^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{r}{k} \iff \frac{r^n}{n!} = \left(\prod_{k=1}^{n_0} \frac{r}{k} \right) \left(\prod_{k=n_0+1}^n \frac{r}{k} \right) \quad (\spadesuit)$$

Pour $k \geq n_0 + 1$, on a : $0 \leq \frac{r}{k} \leq \frac{r}{n_0 + 1} < 1$. D'où : $0 \leq \prod_{k=n_0+1}^n \frac{r}{k} \leq \left(\frac{r}{n_0 + 1} \right)^{n-n_0}$. On déduit de cet encadrement et de (\spadesuit) que :

$$0 \leq \frac{r^n}{n!} \leq \left(\prod_{k=0}^{n_0} \frac{r}{k} \right) \times \left(\frac{r}{n_0 + 1} \right)^{n-n_0}. \quad \text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{r}{n_0 + 1} \right)^{n-n_0} = 0 \text{ (puisque } \left| \frac{r}{n_0 + 1} \right| < 1).$$

On en déduit, grâce au théorème d'encadrement que : $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$

► Si $z \in \mathbb{R}^*$: on applique le résultat précédent au réel strictement positif $|r|$ pour avoir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|r|^n}{n!} = 0$.

Puisque : $\frac{|r|^n}{n!} = \left| \frac{r^n}{n!} \right|$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$.⁸

Conclusion : $\forall r \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$

EXERCICE 23. — (And the winner is... ter) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$

Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{k=1}^n k}{\prod_{k=1}^n n} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{n}$$

D'où :

$$\frac{n!}{n^n} = \left(\prod_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{k}{n} \right) \times \left(\prod_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{k}{n} \right)$$

Le premier produit est majoré par 1 (chacun des termes du produit étant majoré par 1) ; dans le second produit, chacun des termes du produit est majoré par $1/2$. Par conséquent :

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-\lfloor n/2 \rfloor}$$

8. Pour une suite réelle $(u_n)_n$, il est équivalent de dire que $(u_n)_n$ tend vers 0 ou que $(|u_n|)_n$ tend vers 0.

$$\text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\lfloor n/2 \rfloor} = 0.$$

$$\text{D'après le théorème des gendarmes : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

SUITES RÉCURRENTES (“ $u_{n+1} = f(u_n)$ ”)

EXERCICE 24. — Etudier la suite (en particulier, on déterminera l’éventuelle limite) u définie en posant :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$$

On peut commencer par observer que la suite u est **bien définie**, puisque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ (par une récurrence immédiate).

► Pour tout réel x , on a : $f(f(x)) - x = \frac{2}{1 + \frac{2}{1+x}} - x = \frac{2x+2}{x+3} - x = \frac{-x^2 - x + 2}{x+3} = -\frac{(x-1)(x+2)}{x+3}$.

On en déduit que sur $[0, 1]$: $[f(f(x)) - x \geq 0] \iff [x \leq 1]$ (♣).

► On peut également noter que la fonction $x \mapsto \frac{2}{1+u_n}$ est décroissante sur \mathbb{R}_+ . On en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonie opposée.

► Si $u_0 \in [0, 1]$, alors pour tout entier naturel n , $u_{2n} \in [0, 1]$ (récurrence).

En outre : $u_2 = f(f(u_0)) \geq u_0$ (d’après (♣)). On en déduit que (u_{2n}) est croissante, et (u_{2n+1}) est décroissante.

Il reste à observer que (u_{2n}) est majorée par 1, et (u_{2n+1}) est minorée par 1 pour conclure que ces deux suites convergent, nécessairement vers 1 (qui est l’unique solution de l’équation $f(f(x)) = x$ dans $[0, 1]$).

Puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une limite commune (qui est 1), on peut affirmer que (u_n) converge vers 1.

► Si $u_0 > 1$, alors le raisonnement précédent reste valide, en permutant les rôles de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , ce qui ne modifie pas la conclusion : (u_n) converge vers 1.

Conclusion. Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}_+$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

EXERCICE 25. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \geq -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

La suite (u_n) est monotone (croissante si $u_0 \leq 2$, décroissante sinon) puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{2+x}$ est croissante sur $[-2 + \infty[$.

Pour toute valeur de u_0 , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

EXERCICE 26. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.

Si $u_0 \in]-1, 1[$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$;

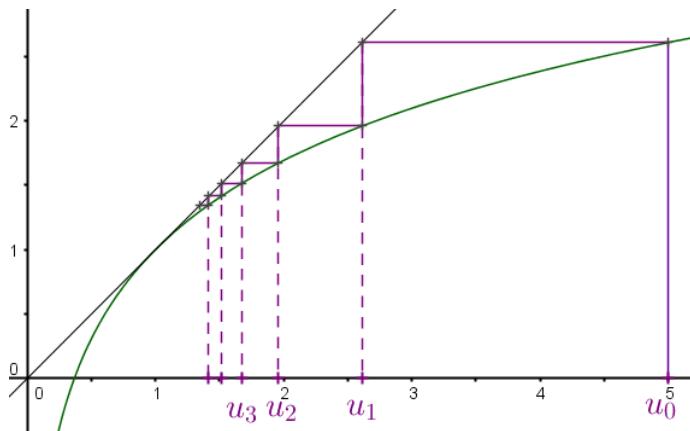
Si $u_0 = 1$ ou $u_0 = -1$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$;

Si $u_0 > 1$ ou $u_0 < -1$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;

EXERCICE 27. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Pour toute valeur de u_0 , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

EXERCICE 28. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.



► On peut commencer par observer que la suite u est **bien définie**, puisque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ (par une récurrence immédiate).

► On peut également noter que la fonction $x \mapsto 1 + \ln(x)$ est croissante sur $[1, +\infty[$. La suite u est donc **monotone**.

► Enfin, il est bien connu⁹ que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 + \ln(x) \leq x$, d'où en particulier : $1 + \ln(u_0) \leq u_0$, c'est-à-dire que $u_1 \leq u_0$. On en déduit que u est **décroissante**.

► Puisque u est décroissante et minorée (par 1), elle converge (théorème de la limite monotone). Reste à résoudre l'équation $f(x) = x$, qui n'a qu'une seule solution ($x = 1$) puisque la courbe représentative de la fonction \ln et sa tangente au point d'abscisse 1 ont un unique point d'intersection.

Conclusion. u converge vers 1.

9. C'est un résultat de référence, traduisant le fait que la courbe représentative de la fonction \ln est située en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1, qui a précisément pour équation $y = x - 1$.

EXERCICES CLASSIQUES D'ÉCRIT OU D'ORAL

EXERCICE 29. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Par hypothèse et par linéarité de la convergence :

- La suite de terme général $\frac{1}{2}(u_n + v_n) + \frac{1}{2}(u_n - v_n) = u_n$ converge ;
- et la suite de terme général $\frac{1}{2}(u_n + v_n) - \frac{1}{2}(u_n - v_n) = v_n$ converge.

EXERCICE 30. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1, 0 \leq v_n \leq 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et préciser leur limite.

Par hypothèse¹⁰ : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n v_n \leq v_n$.

D'où, toujours par hypothèse : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n \leq v_n \leq 1$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

On montre de la même façon que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Conclusion. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

$$\left(\sum_{k=0}^n k! \right)$$

EXERCICE 31. — Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sum_{k=0}^n k! \right)}{n!} = 1$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On a :

$$\frac{\left(\sum_{k=0}^n k! \right)}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{k!}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \quad (\spadesuit)$$

Or pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, on a :

$$\frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

D'où : $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)}$. Par suite : $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n}$ (clubs).

On déduit de (), de () et de l'observation remarquable suivant laquelle la somme de l'énoncé est minorée par 1 que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, 1 \leq \sum_{k=0}^n \frac{k!}{n!} \leq 1 + \frac{2}{n}$$

10. En multipliant par v_n (qui est positif) le premier encadrement.

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k!}{n!} \right) = 1$.

EXERCICE 32. — Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est compris entre 0 et 1/2 à partir d'un certain rang n_0 .

Pour tout entier $n \geq n_0$, on a alors : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$ (réurrence).

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 32-BIS.¹¹

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

1/ Justifier qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$$

2/ Etablir par récurrence que pour tout entier $n \geq n_0$ on a :

$$0 \implies 0 \leq u_n \leq \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$$

3/ En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

1/ Par hypothèse : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. On en déduit qu'il existe un entier naturel n_0 tel que¹² :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{1}{2}$$

Puisque la suite u est strictement positive, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$$

Finalement : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$.

11. Cet exercice est une version détaillée de l'exercice 32. La motivation pour ce second énoncé est de mettre en évidence les étapes essentielles du raisonnement, et d'expliquer d'une manière plus détaillée ce qui avait été fait en classe sur l'exo 32.

12. On utilise la définition de limite, avec $\varepsilon = 1/2$.

2/ Pour tout entier $n \geq n_0$, notons $P(n)$ l'assertion : $0 \leq u_n \leq \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$.

L'assertion $P(n_0)$ est évidemment vraie ; la récurrence est initialisée.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier $n \geq n_0$. D'après la question précédente, on a :

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$$

D'où, par hypothèse de récurrence :

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$$

Soit : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_{n_0}}{2^{n+1-n_0}}$. Ce qui signifie que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, et achève la preuve de l'hérédité.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $0 \implies 0 \leq u_n \leq \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$

3/ Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}} = 0$ (suite géométrique de raison 1/2), on déduit de la question précédente et du théorème des gendarmes que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 33. — “TOUT SUR WALLIS” On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$.

On rappelle (est-ce vraiment utile ?) que les intégrales I_n sont les intégrales de Wallis. L'objectif de cet exo de passer en revue les questions fréquentes relatives à cette famille d'intégrales.

1/ Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante, et à termes positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geq 0} \underbrace{(\cos(t) - 1)}_{\leq 0} dt \leq 0$.

Conclusion. La suite $(I_n)_n$ est décroissante ; et à termes positifs par positivité de l'intégrale.

2/ En déduire que la suite $(I_n)_n$ est convergente.

La suite $(I_n)_n$ étant décroissante et minorée (par 0), elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

3/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

Soit n un entier naturel. On a : $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) \cos(t) dt$.

On pose pour tout réel $t \in [0, \pi/2]$: $\begin{cases} u(t) = \cos^{n+1}(t) \\ v(t) = \sin(t) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t) = -(n+1) \cos^n(t) \sin(t) \\ v'(t) = \cos(t) \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi/2]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour écrire :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \underbrace{[\cos^{n+1}(t) \sin(t)]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \sin^2(t) dt = (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) (1 - \cos^2(t)) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt - (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt \end{aligned}$$

D'où : $I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2} \iff (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n \iff I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

4/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n on a : $u_{n+2} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n = (n+1)I_n I_{n+1} = u_n$.

Ce qui prouve que la suite (u_n) est constante. A ce titre, elle est égale à son premier terme : $u_0 = \frac{\pi}{2}$.¹³

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

5/ Déduire des questions 1, 2 et 4 que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

D'après les questions précédentes, la suite $(I_n)_n$ converge ; puisqu'elle à termes positifs, sa limite ℓ est positive ou nulle.

Supposons $\ell > 0$. Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n I_{n+1} = \ell^2 > 0$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n I_{n+1} = +\infty$; ce qui contredit le résultat de la question précédente. Par conséquent : $\ell = 0$.

Conclusion. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt \right] = 0$.

6/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq \int_0^1 (1-t)^n dt$. En déduire que la suite $(I_n)_n$ est à termes strictement positifs.

Soit n un entier naturel.

D'après la relation de Chasles pour les intégrales : $I_n = \int_0^1 \cos^n(t) dt + \int_1^{\pi/2} \cos^n(t) dt$.

Par positivité de l'intégrale, on a clairement : $\int_1^{\pi/2} \cos^n(t) dt \geq 0$

Il résulte des deux lignes précédentes que : $I_n \geq \int_0^1 \cos^n(t) dt$.

Une étude de fonction sans difficulté permet d'établir que : $\forall t \in [0, 1], \cos(t) \geq 1 - t$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\int_0^1 \cos^n(t) dt \geq \int_0^1 (1-t)^n dt$.

Par suite : $I_n \geq \int_0^1 (1-t)^n dt$. Or : $\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1} > 0$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$. A fortiori, la suite $(I_n)_n$ est à termes strictement positifs.¹⁴

13. Puisque : $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

14. Ce qui permet par la suite de diviser par I_n la conscience tranquille.

7/ Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$

La suite $(I_n)_n$ étant décroissante et à termes strictement positifs, on a pour tout entier naturel n : $0 < I_{n+1} \leq I_n$.

On obtient l'encadrement voulu en divisant par I_n l'encadrement précédent.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

8/ Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{n+1}{n+2}$

La suite $(I_n)_n$ étant décroissante et à termes strictement positifs, on a pour tout entier naturel n : $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1}$.

On obtient l'inégalité voulue en divisant par I_n l'encadrement précédent, et en utilisant la relation de récurrence de la question 3.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

9/ Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

D'après les deux questions précédentes, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

10/ Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Pour tout entier naturel n , on a :

$$n I_n^2 = (n+1) I_n I_{n+1} \times \frac{I_n}{I_{n+1}} \times \frac{n}{n+1}$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$ (question précédente) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ (immédiat).

En outre : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ (question 4).

Conclusion. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

11/ Soit p un entier naturel. Retrouver les formules donnant I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p .

On distingue les cas n pair et n impair pour le calcul de I_n .

► Si n est pair : alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$.

Pour se faire une idée de la formule :

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_1 = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} I_0$$

⋮

$$I_{2p} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p} I_0$$

$$\text{D'où : } \forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

► Si n est impair : alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$. Encore une fois :

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1$$

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} I_1$$

⋮

$$I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1)} I_1$$

$$\text{D'où : } \forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

Prouvons la formule dans le cas impair. On souhaite établir que la propriété $P(p)$: $I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$ est vraie pour tout entier naturel p .

Initialisation : pour $p = 0$, on a d'une part $I_1 = 1$ et d'autre part $\frac{2^0 (0!)^2}{(1)!} = 1$. La propriété est initialisée.

Héritéité : supposons $P(p)$ vraie pour un certain entier naturel p , et montrons que $P(p+1)$ l'est.

$$\text{On a : } I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} = \frac{2p+2}{2p+3} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2p+2}{2p+2} \frac{2p+2}{2p+3} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p+2} ((p+1)!)^2}{(2p+3)!}$$

Ce qui signifie que $P(p+1)$ est vraie, établit l'héritéité de la propriété, et achève donc cette récurrence. On procède de la même manière pour établir mutatis mutandis la formule dans le cas pair.

12/ Etablir que : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(2p+1) I_{2p+1}}{2p I_{2p}} = 1$

On a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2p+1}{2p} = 1$ (immédiat) et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$ (question 9 + prop fondamentale des suites extraites).

Conclusion. $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(2p+1) I_{2p+1}}{2p I_{2p}} = 1$.

13/ Déduire de ce qui précède : $\pi = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2^{4p} (p!)^4}{p ((2p)!)^2}$

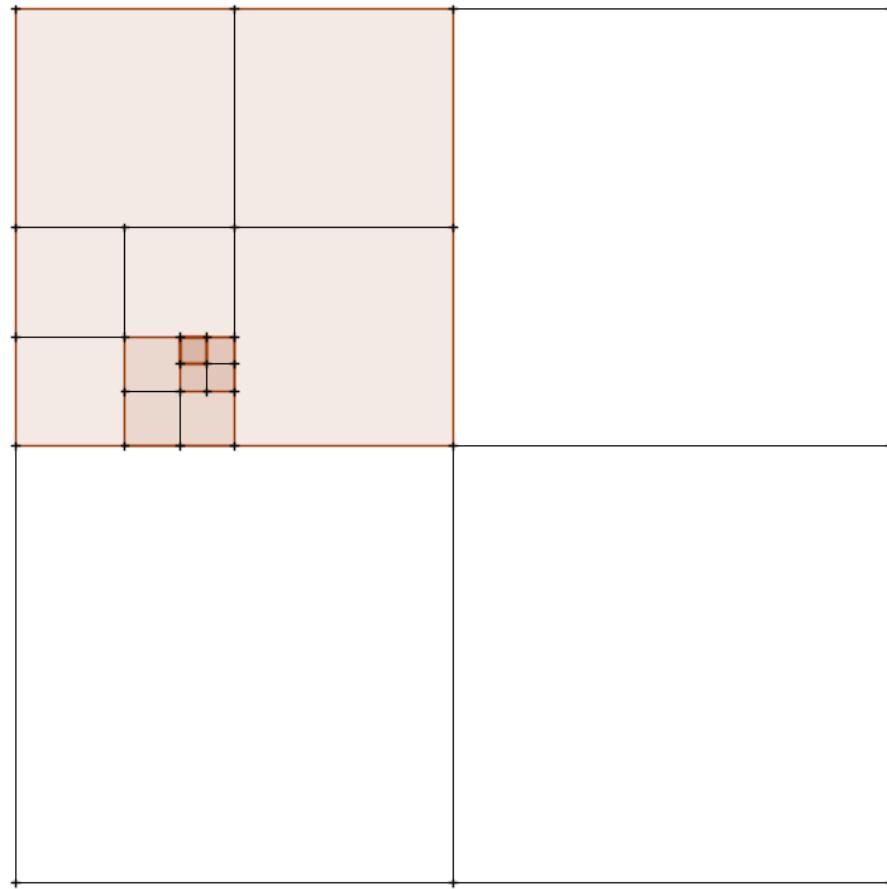
D'après les questions 11 et 12, on a : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2(2p+1)}{\pi} \left(\frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2} \right)^2 = 1$

D'où : $\lim_{p \rightarrow +\infty} (2p+1) \frac{\pi}{2} \frac{((2p)!)^2}{2^{4p} (p!)^4} = 1$. Donc : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(2p+1)}{2p} \times (2p) \times \frac{\pi}{2} \frac{((2p)!)^2}{2^{4p} (p!)^4} = 1$

Par suite : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \pi \frac{p((2p)!)^2}{2^{4p} (p!)^4} = 1$, et donc : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p((2p)!)^2}{2^{4p} (p!)^4} = \frac{1}{\pi}$.

Finalement : $\boxed{\pi = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2^{4p} (p!)^4}{p((2p)!)^2}}$.

EXERCICE 34. — Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes (“de toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous suite convergente”).



EXERCICE 35. — Déterminer la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k}^{-1} \right)$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 10. En sortant les deux premiers et les deux derniers termes de la somme, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k}^{-1} \right) = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \left(\binom{n}{k}^{-1} \right) + \frac{1}{n} + 1$$

Soit : $\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k}^{-1} \right) = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \left(\binom{n}{k}^{-1} \right)$ (♠).

Il suffit alors d'observer que pour tout $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$, on a : $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2}$.

D'où : $\forall k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, \quad \left(\binom{n}{k} \right)^{-1} \leq \frac{2}{n(n-1)}$

On en déduit que :

$$\sum_{k=2}^{n-2} \left(\binom{n}{k}^{-1} \right) \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)}$$

Par suite : $\sum_{k=2}^{n-2} \left(\binom{n}{k}^{-1} \right) \leq \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \quad (\clubsuit)$.

D'après (\spadesuit) et (\clubsuit) , on a : $2 \leq \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k}^{-1} \right) \leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \right) = 2$, on conclut de cet encadrement et du théorème des gendarmes que :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k}^{-1} \right) = 2$

EXERCICE 36. — Soit (u_n) une suite d'entiers naturels 2 à 2 distincts. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Soit (u_n) une suite d'entiers naturels 2 à 2 distincts.

Par l'absurde, supposons que (u_n) n'ait pas pour limite $+\infty$.

Il existe alors un réel M tel que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, les termes de la suite u sont inférieurs ou égaux à M à partir du rang n_0 . Cette affirmation est manifestement absurde, car il serait très difficile de caser une infinité d'entiers tous distincts dans l'intervalle $\llbracket 0, \lfloor M \rfloor \rrbracket$, qui ne contient qu'un nombre fini de places !

Conclusion. Si (u_n) est une suite d'entiers naturels 2 à 2 distincts, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.