

## PARTIE COURS

### Chapitre 10 : Nombres réels

#### 1 – Relations d'équivalence et relations d'ordre

Une **relation d'équivalence** est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive. Exemples : égalité, congruences modulo  $p$  dans  $\mathbb{Z}$ , relation “ $\sim$ ” sur les suites réelles.

Une **relation d'ordre** est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive. Exemples : “ $\leqslant$ ”, divisibilité dans  $\mathbb{N}$  (et pas dans  $\mathbb{Z}$ ), inclusion dans  $\mathcal{P}(E)$ .

Une relation d'ordre  $R$  sur  $E$  est **totale** si pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $E$ , on a  $xRy$  ou  $yRx$ . Exemples : la relation “ $\leqslant$ ” dans  $\mathbb{R}$  est totale, les relations de divisibilité dans  $\mathbb{N}$  et d'inclusion dans  $\mathcal{P}(E)$  ne le sont pas.

#### 2 – Propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Définition de minorant, majorant, min, max, sup et inf.

Toute partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée possède une borne supérieure. Caractérisation de la borne supérieure.

#### 3 – Densité

Définition. Caractérisation séquentielle de la densité.  $\mathbb{D}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Corollaires : tout réel est limite d'une suite de décimaux ;  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  ; tout réel est limite d'une suite de rationnels ; tout réel est limite d'une suite d'irrationnels.

#### 4 – Partie entière

Définition. Propriétés :

$$1/\ \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

2/ La fonction partie entière est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

## PARTIE EXERCICES

#### ► Sur le chapitre 10

- Montrer qu'une relation binaire est une relation d'équivalence (**QC 1**)
- Montrer qu'une relation binaire est une relation d'ordre (totale ou non) (**QC 2**)

#### ► Chapitre 8 - Méthodes de calcul intégral

TOUT et en particulier :

- Calcul d'intégrale via les primitives usuelles (formulaire), une intégration par parties, un changement de variable
- Propriétés-clefs : positivité, croissance, relation de Chasles
- Applications des items précédents à l'étude d'une suite d'intégrales  $(I_n)_n$ , notamment :
  - Positivité de  $(I_n)_n$  (**DS4, pb2A, q1**)
  - Stricte positivité de  $(I_n)_n$  (**DS4, pb2A, q4b**)
  - Monotonie de  $(I_n)_n$  (**DS4, pb1, q9**)
  - Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  par encadrement (**DS4, pb1, q3a**)
  - Relation de récurrence entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$  avec une IPP (**exo 20 de la feuille 8**), ou entre  $I_{n+2}$  et  $I_n$  (“à la Wallis”)

#### ► Chapitre 9 - EDL1 et EDL2

Méthodes au programme de la colle 10.

**QUESTIONS DE COURS**

- **Congruence modulo  $p$  dans  $\mathbb{Z}$ .** La relation de congruence modulo  $p$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$
- **Divisibilité dans  $\mathbb{N}$ .** La relation de divisibilité dans  $\mathbb{N}$  est une relation d'ordre, non totale.

- **Propriété.** Pour tout réel  $x$ , la suite de terme général  $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$  est croissante et majorée par  $x$ .
- **Théorème (volontariat).**  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .