COLLE 12 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N^{o}1 — **Théorème (de comparaison)** : soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty$. Alors (u_n) a pour limite $+\infty$.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty$, et que :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_0] \Longrightarrow [u_n \geqslant v_n]$$

Soit M un réel. Puisque (v_n) diverge vers $+\infty$, il existe un entier naturel n_1 tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_1] \Longrightarrow [v_n \geqslant M]$$

Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour tout entier naturel $n \geqslant n_2$, on a : $u_n \geqslant v_n \geqslant M$.

Le réel M étant arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_2] \Longrightarrow [u_n \geqslant M]$$

Ce qui signifie exactement que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

QUESTION DE COURS N^{o}2 — **Propriété (stabilité des inégalités larges par passage à la limite)** : soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \ell'$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers ℓ et ℓ' respectivement. On suppose en outre que :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_0] \Longrightarrow [u_n \leqslant v_n]$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell > \ell'$ $\quad(\spadesuit)$.

Alors, puisque (u_n) converge vers ℓ :

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_1] \Longrightarrow \left[|u_n - \ell| \leqslant \frac{\ell - \ell'}{3}\right]$$

Et puisque (v_n) converge vers ℓ' :

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_2] \Longrightarrow \left[|v_n - \ell'| \leqslant \frac{\ell - \ell'}{3}\right]$$

Posons : $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. On a pour tout entier $n \geqslant n_3$:

$$\ell - \frac{\ell - \ell'}{3} < u_n \leqslant v_n < \ell' + \frac{\ell - \ell'}{3}$$

D'où en particulier : $\ell - \dfrac{\ell - \ell'}{3} < \ell' + \dfrac{\ell - \ell'}{3}$ soit : $\ell - \ell' < 2\,\dfrac{\ell - \ell'}{3}$, càd : $1 < \dfrac{2}{3}$. Contradiction !

On en déduit que l'assertion $(\spadesuit)$ est fausse. Par conséquent : $\ell \leqslant \ell'$.

QUESTION DE COURS N^{o}3 — **Théorème (de la limite monotone)** : toute suite réelle croissante et majorée converge. Toute suite réelle décroissante et minorée converge.

Soit (u_n) une suite croissante et majorée : $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

Notons $E = \{u_n\, ,\, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des termes de la suite (u_n).

L'ensemble est une **partie de $\mathbb{R}$, non vide** ($u_0 \in E \ldots$) et **majorée** (par M).

D'après la propriété de la borne supérieure : $S = \sup E$ existe.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier naturel n_0 tel que : $S - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant S$ (puisque $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E).

Or, (u_n) étant croissante (par hypothèse) et majorée par S, on en déduit que pour tout entier naturel n :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow S - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant S \quad \text{d'où : } n \geqslant n_0 \Longrightarrow S - \varepsilon < u_n \leqslant S \quad \text{ce qui implique : } n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - S| < \varepsilon$$

En résumé, on a prouvé que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - S| < \varepsilon$. Donc la suite (u_n) est convergente (et a pour limite S). **Conclusion**. Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) est convergente.

Dans l'autre situation (celle où (u_n) est décroissante et minorée), il suffit d'observer que la suite $(-u_n)$ est croissante et majorée pour se ramener au cas précédent, et conclure en observant que $(-u_n)$ converge si et seulement si (u_n) converge.

Question de cours n^{o}4 — **Théorème (d'encadrement ou "des gendarmes")** : soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que :

- à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
- (u_n) et (w_n) sont convergentes
- $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} w_n$

Alors (v_n) converge et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} w_n$.

Soient (u_n) et (w_n) deux suites convergentes, avec $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} w_n$. Notons : $\ell = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} w_n$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Par hypothèse : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n)$
- Comme (u_n) a pour limite ℓ : $\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_1 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon)$
- Comme (w_n) a pour limite ℓ : $\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_2 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon)$

Posons : $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. Pour $n \geqslant n_3$, les trois conditions précédentes sont réalisées simultanément, et on a donc :

$$\ell - \varepsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \ell + \varepsilon \text{ d'où en particulier : } \ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon \text{ soit : } |v_n - \ell| < \varepsilon.$$

En résumé, on a prouvé que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_3 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_3 \Longrightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$.

Conclusion. La suite (v_n) est convergente et a pour limite ℓ.

Question de cours n^{o}5 — **Propriété fondamentale des suites extraites**. Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

La preuve repose sur le lemme suivant.

Lemme. Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.

Prouvons le lemme. On note $P(n)$ l'assertion : $\varphi(n) \geqslant n$, et on montre par récurrence sur $\mathbb{N}$ que l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$P(0)$ est vraie car un entier naturel est positif ou nul...

Cette remarquable vérification faite, passons à l'hérédité : on suppose $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Alors : $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$ d'où $\varphi(n+1) \geqslant n+1$ puisque φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie. Fin de la preuve du lemme $\triangle$.

- Retour à la preuve de la PFSE. Soit (u_n) une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$; et soit (v_n) une suite extraite de (u_n) ; il existe donc une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

Considérons un réel $\varepsilon > 0$.

Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n on a : $(n \geqslant n_0) \Longrightarrow (|u_n - \ell| < \varepsilon)$.

Or l'hypothèse faite sur φ implique que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$ (selon le lemme)

Il s'ensuit que : $(n \geqslant n_0) \Longrightarrow \left(\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon\right)$.

En recollant les morceaux du raisonnement précédent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0) \Longrightarrow \left(\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon\right).$$

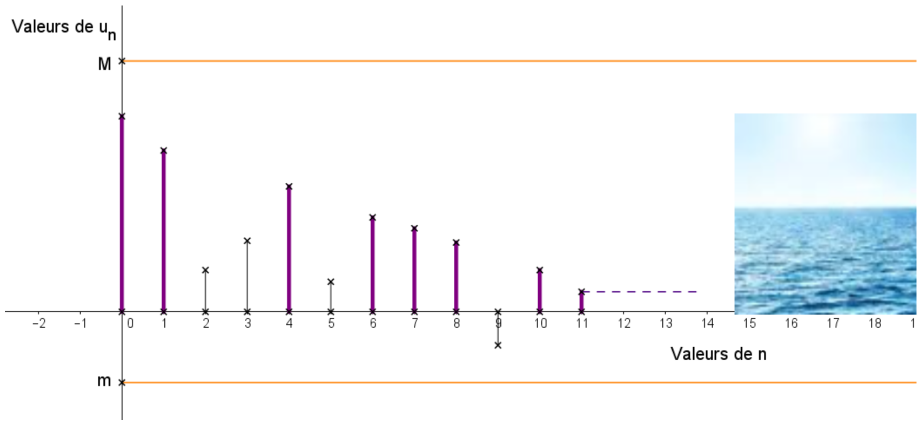
Conclusion. La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est convergente et a pour limite $\ell = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$. Ainsi, toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Remarque. La PFSE est encore valable lorsque $\ell = \pm\infty$. Et elle est également valable lorsque (u_n) est une suite complexe convergente (et de limite $\ell \in \mathbb{C}$).

Théorème de Bolzano-Weierstrass. De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

Preuve 1 : “avec vue sur la mer”.
Soit (u_n) une suite réelle bornée ; il existe deux réels m et M tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$.
Introduisons une nouvelle et originale notion :

Définition 1. — Un entier naturel n a **vue sur la mer** si : $\forall p \in \mathbb{N},\ (p > n) \Longrightarrow (u_n > u_p)$.
A l’opposé, n a **la vue bouchée** si : $\exists p \in \mathbb{N},\ (p > n) \wedge (u_n \leqslant u_p)$



Deux cas se présentent alors.

➤ <u>**Une infinité d’entiers ont vue sur la mer**</u>.

On note alors $\varphi(0)$, $\varphi(1)$,..., $\varphi(n)$... ces entiers. La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est alors (strictement) décroissante [1], et minorée (par hypothèse). Donc elle converge, et on a extrait de (u_n) une suite convergente.

➤ <u>**Seulement un nombre fini d’entiers ont vue sur la mer**</u>.

On note alors N_0 le rang du dernier (du plus grand [2]) entier ayant vue sur la mer.
Puis on pose $\varphi(0) = N_0 + 1$. Puisque $(N_0 + 1)$ a la vue bouchée, il existe un entier $p > N_0 + 1$ tel que $u_p \geqslant u_{N_0+1}$. Judicieusement, on pose $\varphi(1) = p$. A ce point du raisonnement, on a donc construit deux entiers naturels $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$, tels que $\varphi(0) < \varphi(1)$ et $u_{\varphi(0)} \leqslant u_{\varphi(1)}$.
En itérant cette construction (ce qui est rendu possible par notre hypothèse), on construit une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ croissante et majorée (par hypothèse). Donc elle converge, et dans ce second cas, on a aussi extrait de (u_n) une suite convergente.

Conclusion : de toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

Preuve 2 : “dichotomique” (“sans vue sur la mer”).

Soit (u_n) une suite réelle bornée ; il existe deux réels m et M tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$.

Appelons $c = \dfrac{m+M}{2}$ l’abscisse du milieu du segment $[m, M]$. On pose alors : $a_0 = m$, $c_0 = c$, $b_0 = M$ et $\varphi(0) = 0$.

Au moins l’une des deux moitiés de l’intervalle $[m, M]$ contient une infinité de termes.

- ➤ Si $[a_0, c_0]$ contient une infinité de termes, on pose : $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ et $\varphi(1)$ le plus petit rang $> \varphi(0)$ d’un terme appartenant à $[a_1, b_1]$;
- ➤ Sinon, $[c_0, b_0]$ contient une infinité de termes, et on pose alors : $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$ et $\varphi(1)$ le plus petit rang $> \varphi(0)$ d’un terme appartenant à $[a_1, b_1]$.

En itérant ce processus, on construit une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ (extraite de u), et deux suites (a_n) et (b_n) satisfaisant les conditions suivantes :

- ➤ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]\ \ (\spadesuit)$;
- ➤ $\forall n \in \mathbb{N},\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]\ \ (\clubsuit)$;
- ➤ $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}\ \ (\heartsuit)$.

1. Par définition d’entier ayant vue sur la mer.
2. Qui existe, puisque toute partie finie de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

D'après ($\heartsuit$) et ($\clubsuit$), les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes : elles convergent donc vers une limite commune, que nous noterons ℓ.

Or d'après ($\spadesuit$) : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$. Le théorème d'encadrement permet alors de conclure que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge (et a pour limite ℓ).

$\boxed{\textbf{Conclusion} \text{ : de toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.}}$

Remarque - Conséquences à venir du TBW

➢ **Théorème des bornes atteintes**. Toute fonction de $\mathscr{C}^0\left([a,b]\,,\mathbb{R}\right)$ est bornée et atteint ses bornes.

$$\Downarrow$$

➢ **Théorème de Rolle**. Au cours d'une randonnée en montagne, si le départ et l'arrivée sont à la même altitude, et que l'on ne tombe pas dans un ravin, il y a au moins un moment où l'on marche à plat.

$$\Downarrow$$

➢ **Théorème des accroissements finis**. Si durant une heure on parcourt 100kms sur l'autoroute, il y a au moins un moment où la vitesse instantanée est de 100km/h.

$$\Downarrow$$

➢ **Propriété assez utile en pratique. . .** Si f est une fonction dérivable sur I et à valeurs réelles, alors f est croissante sur I SSI f' est positive sur I.

Banque d'exercices

Exercice 1. — La suite de terme général $\cos(n)$ n'est pas du tout périodique.
Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \cos(n)$.
Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Montrer que $(u_n = u_p) \iff (n = p)$
Remarque : on pourra admettre que π est irrationnel.

Exercice 2. — Combat des chefs 1. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^n} = +\infty$

Exercice 3. — Combat des chefs 2. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Exercice 4. — De l'utilité des équivalents 1. Pour tout entier naturel n on pose :

$$u_n = \frac{n^2 - \arctan(n^3+1) - 2\ln(n)}{\mathrm{e}^n - n^{3/2} + \sqrt{n} + 5\sin(n) + 1}$$

Etablir que : $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}$. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 5. — De l'utilité des équivalents 2. Etablir que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Exercice 6. — Etablir que la suite de terme général $\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ n'a pas de limite.

Exercice 7. — Deux suites adjacentes. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Etablir que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 8. — Terme général de la suite de Fibonacci. Déterminer l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — La suite de terme général $\cos(n)$ n'est pas du tout périodique.

Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \cos(n)$.

Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Montrer que $(u_n = u_p) \Longleftrightarrow (n = p)$

Remarque : on pourra admettre que π est irrationnel.

Soient n et p dans $\mathbb{N}$ tels que : $u_n = u_p$, càd : $\cos(n) = \cos(p)$.

On a alors : $n = \pm p\ [2\pi]$. D'où $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ n = \pm p + 2k\pi$. Il s'ensuit que : $2k\pi = n \pm p$.

Supposons que $k \neq 0$. Alors on peut écrire : $\pi = \dfrac{n \pm p}{2k}$.

On a ainsi écrit π comme le quotient de deux entiers relatifs. Ce qui prouve que π est rationnel : ABSURDE !

On en déduit que $k = 0$. Par conséquent : $n = \pm p$. Puisque n et p sont entiers naturels, on en déduit que : $n = p$.

Conclusion. La suite de terme général $\cos(n)$ "ne prend jamais deux fois la même valeur" : $(\cos(n) = \cos(p)) \Longleftrightarrow (n = p)$

Exercice 2. — Combat des chefs 1. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^n} = +\infty$

Pour tout entier $n \geqslant 3$ on a : $\displaystyle\frac{n!}{\mathrm{e}^n} = \prod_{k=1}^{2} \frac{k}{\mathrm{e}} \times \prod_{k=3}^{n} \frac{k}{\mathrm{e}} = \frac{2}{\mathrm{e}^2} \times \prod_{k=3}^{n} \frac{k}{\mathrm{e}}$ $(\spadesuit)$

Or : $\displaystyle\prod_{k=3}^{n} \frac{k}{\mathrm{e}} \geqslant \prod_{k=3}^{n} \frac{3}{\mathrm{e}}$. D'où : $\displaystyle\prod_{k=3}^{n} \frac{k}{\mathrm{e}} \geqslant \left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)^{n-2}$ $(\clubsuit)$ De plus : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)^{n-2} = +\infty$ $(\heartsuit)$

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$, $(\heartsuit)$ et la propriété de comparaison : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^n} = +\infty$

Exercice 3. — Combat des chefs 2. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\displaystyle\frac{n^n}{n!} = n \times \prod_{k=2}^{n} \frac{n}{k}$. Or : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{n}{k} \geqslant 1$. Par suite : $\displaystyle\frac{n^n}{n!} \geqslant n$ $(\spadesuit)$.

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et la propriété de comparaison, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

Exercice 4. — De l'utilité des équivalents 1. Pour tout entier naturel n on pose :

$$u_n = \frac{n^2 - \arctan(n^3+1) - 2\ln(n)}{\mathrm{e}^n - n^{3/2} + \sqrt{n} + 5\sin(n) + 1}$$

Etablir que : $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}$. En déduire la limite de (u_n).

A partir d'un certain rang, on a :

$$u_n = \frac{n^2}{\mathrm{e}^n} \times \underbrace{\frac{1 - \dfrac{\arctan(n^3+1)}{n^2} - 2\dfrac{\ln(n)}{n^2}}{1 - \dfrac{n^{3/2}}{\mathrm{e}^n} + \dfrac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n} + 5\dfrac{\sin(n)}{\mathrm{e}^n} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}}}_{\varphi_n}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\arctan(n^3+1)}{n^2} = 0$ ("bornée $\times$ limite 0") ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^2} = 0$ (CC) ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{3/2}}{\mathrm{e}^n} = 0$ (CC)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n} = 0$ (CC) ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{\mathrm{e}^n} = 0$ ("bornée $\times$ limite 0") ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = 0$ (usuel).

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$.

Par conséquent : $u_n = \dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n} \times \varphi_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$. D'où :

$$u_n \sim \frac{n^2}{\mathrm{e}^n}$$

Puisqu'en outre $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n} = 0$ (CC), on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - \arctan(n^3+1) - 2\ln(n)}{\mathrm{e}^n - n^{3/2} + \sqrt{n} + 5\sin(n) + 1} = 0$

Exercice 5. — De l'utilité des équivalents 2. Etablir que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Pour tout $n \geqslant 398$, on a : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Or : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$ (usuel). D'où : $n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Exercice 6. — Etablir que la suite de terme général $\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ n'a pas de limite.

La suite extraite (u_{3n}) converge vers 0 (puisqu'elle est constante égale à 0), et la suite extraite (u_{6n+1}) converge vers $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (puisqu'elle est constante égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

D'après la propriété fondamentale des suites extraites [3], la suite de terme général $\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ n'a pas de limite.

3. La **propriété fondamentale des suites extraites** affirme que si u est une suite convergente de limite ℓ, alors toute suite extraite de u converge vers ℓ. On utilise ici la contraposée de cette implication : en exhibant deux suites extraites qui ne convergent pas vers la même limite, on peut affirmer que la suite u n'est pas convergente.

Exercice 7. — Deux suites adjacentes. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Etablir que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n!}$. D'où : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$. D'où : (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \times n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!}$$
$$= \frac{-1}{n(n+1) \times (n+1)!} \leqslant 0$$

D'où : (v_n) est décroissante.

Conclusion. Les suites (u_n) et (v_n) sont monotones, de monotonies opposées, et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Remarque. *D'après le théorème des suites adjacentes, les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers le même réel. On a déjà établi cette année en cours que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{e}$, et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = \mathrm{e}$. En utilisant un raisonnement astucieux à partir de ces résultats, on peut prouver que e est irrationnel (c'est l'objet de l'exercice 11 de la feuille d'exos sur les suites).*

Exercice 8. — Terme général de la suite de Fibonacci. Déterminer l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

L'équation caractéristique associée à $(u_n)_n$ est $r^2 - r - 1 = 0$. Elle a deux racines réelles : $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.[4]

$$\boxed{\underline{\textbf{Selon le cours}} : \exists\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

➢ <u>De plus</u> : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda \left((1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})\right) = 2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \sqrt{5}\,\lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ \lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. Soit encore : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{2^n 5}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]}$

4. Le réel r_1 est le célèbre *nombre d'or*, souvent noté φ ; et $r_2 = -1/\varphi$ (puisque le produit $r_1 r_2$ vaut -1).