Colle 13 – Questions de cours

Question de cours n^{o}1 — **Propriété**. L'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe.

Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes d'un même groupe $(G, \star)$.

— Puisque H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G, on a : $H_1 \subset G$ et $H_2 \subset G$.

Il s'ensuit que : $(H_1 \cap H_2) \subset G$ (SG1)

— Puisque H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G, on a : $\mathrm{e} \in H_1$ et $\mathrm{e} \in H_2$.

Il s'ensuit que : $\mathrm{e} \in (H_1 \cap H_2)$ (SG2)

— Soient h et h' deux éléments de $H_1 \cap H_2$.
Alors $h \star h'$ appartient à H_1 puisque h et h' sont dans H_1 et que H_1 est un sous-groupe de G.

Et $h \star h'$ appartient à H_2 puisque h et h' sont dans H_2 et que H_2 est un sous-groupe de G.

Donc : $h \star h'$ appartient à $H_1 \cap H_2$.

En résumé : $\forall (h, h') \in (H_1 \cap H_2)^2, \ h \star h' \in H_1 \cap H_2$ (SG3)

— Soient h un élément de $H_1 \cap H_2$.
Alors h^{-1} appartient à H_1 et à H_2, puisque h appartient à H_1 et H_2, et que H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G.

Ainsi : $\forall h \in (H_1 \cap H_2), \ h^{-1} \in (H_1 \cap H_2)$ (SG4)

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé, $H_1 \cap H_2$ est une partie de G (SG1), contenant l'élément neutre (SG2), stable pour la loi $\star$ (SG3) et par passage à l'inverse (SG4). A ce titre : $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G.[1]

Question de cours n^{o}2 — **Propriété des morphismes de groupes 1**. Si $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \sharp)$ un morphisme de groupes, alors : $f(\mathrm{e}_G) = \mathrm{e}_H$

Puisque f est un morphisme de groupes, on a : $f(\mathrm{e}_G \star \mathrm{e}_G) = f(\mathrm{e}_G) \sharp f(\mathrm{e}_G)$ et $f(\mathrm{e}_G \star \mathrm{e}_G) = f(\mathrm{e}_G)$.

Ainsi : $f(\mathrm{e}_G) \sharp f(\mathrm{e}_G) = f(\mathrm{e}_G)$. D'où : $[f(\mathrm{e}_G)]^{-1} \sharp f(\mathrm{e}_G) \sharp f(\mathrm{e}_G) = [f(\mathrm{e}_G)]^{-1} \sharp f(\mathrm{e}_G)$. D'où : $f(\mathrm{e}_G) = \mathrm{e}_H$.

Question de cours n^{o}3 — **Propriété des morphismes de groupes 2**. Si $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \sharp)$ un morphisme de groupes, alors : $\forall g \in G, \ f\left(g^{-1}\right) = [f(g)]^{-1}$

Sous les hypothèses de l'énoncé : $f(g^{-1} \star g) = f(g^{-1}) \sharp f(g)$ et $f(g^{-1} \star g) = f(\mathrm{e}_G) = \mathrm{e}_H$.

Ainsi : $f(g^{-1}) \sharp f(g) = \mathrm{e}_H$. D'où : $f\left(g^{-1}\right) = [f(g)]^{-1}$

Question de cours n^{o}4 — **Propriété des morphismes de groupes 3**. Si $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \sharp)$ un morphisme de groupes, alors : $\ker f$ est un sous-groupe de G.

Rappelons que : $\ker f = \{g \in G, \ f(g) = \mathrm{e}_H\}$. Il résulte de cette définition que $\ker f$ est une partie de G (SG1), et de la propriété 1 que $\mathrm{e}_G \in \ker f$ (SG2).

En outre, $\ker f$ est stable pour la loi $\star$ (SG3), puisque :

$$\forall (g, g') \in (\ker f)^2, \ f(g \star g') = f(g) \sharp f(g') = \mathrm{e}_H \sharp \mathrm{e}_H = \mathrm{e}_H$$

D'où : $(g, g') \in (\ker f)^2 \Longrightarrow g \star g' \in \ker f$

Enfin, $\ker f$ est stable par passage à l'inverse (SG4), puisque :

$$\forall g \in \ker f, \ f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1} = \mathrm{e}_H^{-1} = \mathrm{e}_H$$

D'où : $g \in \ker f \Longrightarrow g^{-1} \in \ker f$

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé, $\ker f$ est une partie de G (SG1), contenant l'élément neutre (SG2), stable pour la loi $\star$ (SG3) et par passage à l'inverse (SG4). A ce titre : $\ker f$ est un sous-groupe de G.

---

1. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la loi de composition interne, on peut noter simplement un groupe G, plutôt que $(G, \star)$.

QUESTION DE COURS N^{o}5 — **Propriété**. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$; et $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

Dans les 2 cas, il suffit de vérifier les axiomes (SG1) à (SG4) (au besoin, voir chapitre 4-bis pour le détail de ces vérifications vraiment rapides).

QUESTION DE COURS N^{o}6 — **Propriété**. $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \circ)$ est un groupe non abélien.

Rappelons que $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ est l'ensemble des similitudes directes, c'est à dire l'ensemble des tranformations du plan complexe ayant pour écriture $z \longrightarrow az + b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$) ; dans cette preuve, nous noterons $f_{a,b}$ cette similitude.

➤ Loi de composition interne : la composition usuelle des applications est une ℓci sur $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$. En effet, si $f_{a,b}$ et $f_{a',b'}$ sont deux similitudes directes, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (f_{a',b'} \circ f_{a,b})(z) = f_{a',b'}(az + b) = a'az + a'b + b' \text{ d'où : } f_{a',b'} \circ f_{a,b} = f_{aa',a'b+b'}$$

La composée de deux similitudes directes est encore une similitude directe, ce qui assure que la composition usuelle est une ℓci sur $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$.

➤ En outre, cette loi est associative, puisque la composition usuelle des applications l'est.

➤ Elément neutre : l'identité de $\mathbb{C}$ est l'élément neutre pour la composition puisque pour toute $f \in \text{Sim}^+(\mathbb{C})$ on a : $f \circ \text{id}_{\mathbb{C}} = \text{id}_{\mathbb{C}} \circ f = f$. De plus : $\text{id}_{\mathbb{C}} = f_{1,0}$, d'où : $\text{id}_{\mathbb{C}} \in \text{Sim}^+(\mathbb{C})$.

➤ Tout élément de $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ est inversible : si $f_{a,b}$ est une similitude directe, alors $f_{a,b}$ admet une bijection réciproque qui est encore une similitude directe. Explicitement : $f_{a,b}^{-1} = f_{1/a,-b/a}$.

L'ensemble $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ est muni d'une loi de composition interne associative (la composition usuelle des applications), pour laquelle il existe un élément neutre ($\text{id}_{\mathbb{C}}$), et où tout élément est inversible. Ainsi, $\left(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \circ\right)$ est un groupe.

En outre : $f_{1,1} \circ f_{2,1} = f_{2,2}$ tandis que $f_{2,1} \circ f_{1,1} = f_{2,3}$. Il s'ensuit que le groupe $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ est non abélien.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Etablir que $\forall\, x \in [-1,1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 2. — **Propriété**. La composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives) est injective (*resp.* surjective).

Exercice 3. — **Une limite de référence**. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Exercice 4. — **Exercice classique**. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$

Exercice 5. — Calculer la dérivée n-ième de f, définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{ax+b}$

Exercice 6. — **Application du binôme de Newton**. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Exercice 7. — **(CCINP-MP 2022)**. On note H la fonction définie par l'expression $H(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1/ Justifier que H est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2/ Donner une expression de $H'(x)$.

3/ Ecrire le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction H.

Exercice 8. — **(E3A-MP 2022)**. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\omega = \exp\left(\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)$.

1/ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si, et seulement si, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

2/ Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$ et $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\omega^k$

Exercice 9. — **(E3A-PC 2022, intégrales de Wallis)**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$

1/ Montrer que (u_n) est décroissante ; puis qu'elle est convergente.

2/ Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\,u_n$

Exercice 10. — **(Centrale-TSI 2021)**.

Montrer que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$ on a : $\dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1}$.

Exercice 11. — **(E3A-MP 2020)**. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Etablir que $\forall\, x \in [-1,1]$, $\arccos(x)+\arcsin(x)=\dfrac{\pi}{2}$

Posons : $\forall\, x \in [-1,1]\,,\ f(x)=\arccos(x)+\arcsin(x)$. La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, et : $\forall\, x \in [-1,1]\,,\ f'(x)=0$.
Il s'ensuit que f est constante sur $]-1,1[$, égale (par exemple) à $f(0)=\arccos(0)+\arcsin(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

On a donc établi que : $\forall\, x \in\ ]-1,1[\ ,\ \arccos(x)+\arcsin(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

Les calculs aisés de $f(1)$ et $f(-1)$ permettent de "fermer les crochets".

Finalement, on peut conclure : $\boxed{\forall\, x \in [-1,1],\ \arccos(x)+\arcsin(x)=\dfrac{\pi}{2}}$.

Exercice 2. — **Propriété**. La composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives) est injective (*resp.* surjective).

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

➤ **Supposons f et g injectives**. Soient x et x' deux éléments de E. Alors :

$$[(g\circ f)(x)=(g\circ f)(x')] \Longleftrightarrow [g(f(x))=g(f(x'))] \underbrace{\Longrightarrow}_{g \text{ injective}} [f(x)=f(x')] \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ injective}} [x=x']$$

Ce qui prouve l'injectivité de $g\circ f$. **Conclusion** : si f et g sont injectives, alors $g\circ f$ est injective.

➤ **Supposons à présent f et g surjectives**. Soit $z \in G$.

Alors, l'application g étant surjective : $\exists\, y \in F,\ g(y)=z$.
Et puisque f est surjective : $\exists\, x \in E,\ f(x)=y$.
En exploitant ces deux relations, on a : $g(f(x))=z$.
Puisque z est un élément arbitraire de G, on vient d'établir que : $\forall\, z \in G,\ \exists\, x \in E,\ (g\circ f)(x)=z$.
Ce qui prouve la surjectivité de $g\circ f$. **Conclusion** : si f et g sont surjectives, alors $g\circ f$ est surjective.

Exercice 3. — **Une limite de référence**. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

Pour tout $n \geqslant 2024$, on a : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Or : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim_{+\infty}\dfrac{1}{n}$ (usuel). D'où : $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim_{+\infty} 1$. D'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

Conclusion. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

Exercice 4. — **Exercice classique**. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$

Soient n et k deux entiers naturels et θ un réel. On a : $\cos(k\theta)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)$.
Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)\Longleftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)$$

Il "ne reste plus qu'à" calculer la somme entre parenthèses. En effet, en posant :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta},\ \text{on a donc : }\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\mathrm{Re}(S_n)\quad(\spadesuit)$$

Or : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \iff S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k$

S_n est une somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On peut donc lui appliquer la formule que vous connaissez bien, sous réserve que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, c'est-à-dire si $\theta \neq 0 \ [2\pi]$.

On suppose donc $\theta \neq 0 \ [2\pi]$. Alors :

$$S_n = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \iff S_n = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \iff S_n = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)} \quad \textit{(technique de "l'angle-moitié")}$$

$$\iff S_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}\right)} \frac{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{n+1}{2}\ \theta\right)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ d'où finalement : } \boxed{S_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\ \theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (\heartsuit)}$$

On déduit de ($\spadesuit$), ($\clubsuit$) et ($\heartsuit$) que : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \theta \neq 0\ [2\pi]\,,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\ \theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$.

Dans le cas où $\theta = 0 \ [2\pi]$, on a $\cos\theta = 1$ d'où : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \theta = 0\ [2\pi]\,,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = n+1}$

Exercice 5. — Calculer la dérivée n-ième de f, définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{ax+b}$

Selon les TG, les fonctions $g : x \longmapsto 2x-1$ et $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $f = gh$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f^{(n)} = (gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$$

En observant que $g^{(k)}$ est nulle dès que $k \geqslant 2$, on peut écrire : $f^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$

D'où, pour tout réel x et pour tout entier naturel n :

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0}(2x-1)a^n\mathrm{e}^{ax+b} + \binom{n}{1}2a^{n-1}\mathrm{e}^{ax+b} = (2x-1)a^n\mathrm{e}^{ax+b} + 2na^{n-1}\mathrm{e}^{ax+b} = \left[a(2x-1)+2n\right]a^{n-1}\mathrm{e}^{ax+b}$$

Exercice 6. — **Application du binôme de Newton.** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f en posant : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^n \quad (\spadesuit)}$.

D'après la formule du binôme de Newton : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad (\heartsuit)}$.

En calculant $f(1)$ à l'aide des formules ($\spadesuit$) et ($\heartsuit$), on obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$

➤ La fonction f est dérivable (TG) sur $\mathbb{R}$, et on obtient deux expressions pour sa dérivée en utilisant les formules ($\spadesuit$) et ($\heartsuit$).

D'une part : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n(1+x)^{n-1} \quad (\diamondsuit)}$ Et d'autre part : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} \quad (\clubsuit)}$

En calculant $f'(1)$ à l'aide des formules ($\diamondsuit$) et ($\clubsuit$), on obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}}$

Exercice 7. — (CCINP-MP 2022). On note H la fonction définie par l'expression $H(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1/ Démontrer que H est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Par construction, la fonction H est la primitive s'annulant en 0 de la fonction $f : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{t^2}$.

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et que $H' = f$), on en déduit que : $H \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2/ Donner une expression de $H'(x)$.

Par construction : $\forall x \in \mathbb{R},\ H'(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

3/ Ecrire le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction H.

D'après ce qui précède, H est dérivable en 0, donc admet un DL à l'ordre 1 en 0, donné par la célebrissime formule :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = H(0) + xH'(0) + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Or $H(0) = 0$ et $H'(0) = 1$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Exercice 8. — (E3A-MP 2022). Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\omega = \exp\left(\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)$.

1/ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si, et seulement si, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a : $|z| = 1 \underbrace{\iff}_{|z|\geqslant 0} |z|^2 = 1 \iff z\overline{z} = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

2/ Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$

On a : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \dfrac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$ (puisque $\omega^n = 1$).

Par ailleurs :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$= \exp\left(\mathrm{i}\pi(n-1)\right) = (-1)^{n-1}.$$

Conclusion. Pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$ et $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = (-1)^{n-1}$

Exercice 9. — (E3A-PC 2022, intégrales de Wallis). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$

1/ Montrer que (u_n) est décroissante ; puis qu'elle est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) - \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^n(t)(\cos(t)-1)}_{\leqslant 0}\,\mathrm{d}t$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. D'où : (u_n) est décroissante.

Par ailleurs, la suite (u_n) est positive (par positivité de l'intégrale. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée (par 0) : d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

2/ Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t$

Posons : $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\begin{cases} u(t) = \sin(t) \\ v(t) = \cos^{n+1}(t) \end{cases}$ d'où : $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t) \end{cases}$

Selon la formule d'IPP (u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$) :

$$u_{n+2} = \underbrace{\left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t$$

D'où : $u_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2(t)\right)\cos^n(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t$

C'est-à-dire : $u_{n+2} = (n+1)\,u_n - (n+1)\,u_{n+2}$ d'où : $\boxed{u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n}$

EXERCICE 10. — (Centrale-TSI 2021).

Montrer que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$ on a : $\quad \dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1}$.

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k < n$. On a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Conclusion. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$ on a : $\quad \dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1}$.

Remarque. Cette relation est la relation de Pascal, déjà vue cette année. On peut vérifier aisément qu'elle reste vraie sans condition sur les entiers n et k : $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2$, $\dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1}$.

EXERCICE 11. — (E3A-MP 2020). Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$

La fonction ch est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction $1/\mathrm{ch}$ est continue sur $\mathbb{R}$; d'après le théorème fondamental de l'Analyse, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

Soit x un nombre réel. On a :

$$\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{u=\mathrm{e}^t} \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{2}{u + u^{-1}} \times \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[2\arctan(u)\right]_1^{\mathrm{e}^x} = 2\arctan(\mathrm{e}^x) - 2\arctan(1)$$

Conclusion. $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$

En d'autres termes, la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \dfrac{\pi}{2}$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 de la fonction $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$.