

## EXERCICES 12 – GROUPES, ANNEAUX, CORPS

### GROUPES

**EXERCICE 1.** — Montrer que  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  est un groupe. Peut-on remplacer  $\mathbb{R}_+^*$  par  $\mathbb{R}_-^*$  ?

**EXERCICE 2.** — Montrer que  $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, +)$  est un groupe. A-t-on toujours un groupe si on remplace la loi “+” par la loi “o” (composition) ?

**EXERCICE 3.** — On note  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $\mathbb{K}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré inférieur ou égal à  $n$  ( $n$  entier naturel). Vérifier que  $(\mathbb{K}_n[X], +)$  est un groupe abélien. L'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré exactement  $n$  est-il un groupe ?

**EXERCICE 4.** — On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble des nombres décimaux :  $\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^k} , n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$ . Montrer que  $(\mathbb{D}, +)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ .

**EXERCICE 5.** — Montrer que  $(\mathbb{U}, \times)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

**EXERCICE 6.** — Soit  $n$  un entier naturel  $\geq 2$ . Montrer que  $(\mathbb{U}_n, \times)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{U}, \times)$ .

**EXERCICE 7.** — Soit  $E$  un ensemble non-vide. L'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  est-il un groupe muni de la lci  $\cup$  ? De la lci  $\cap$  ?

**EXERCICE 8.** — Décrire tous les groupes possédant 1, 2, 3 ou 4 éléments. Déduire de ces descriptions que tout groupe fini de cardinal inférieur ou égal à 4 est abélien.

**EXERCICE 9.** — (**Groupe des permutations de  $\mathbb{C}$** ). On appelle **permutation de  $\mathbb{C}$**  une bijection de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . On note  $\text{Bij}(\mathbb{C})$  l'ensemble des permutations de  $\mathbb{C}$ .

Montrer que  $(\text{Bij}(\mathbb{C}), \circ)$  est un groupe, et qu'il n'est pas abélien.

**EXERCICE 10.** — (**Groupe des translations dans le plan complexe**). On appelle **translation dans le plan complexe** une application  $T_b$  définie sur  $\mathbb{C}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, T_b(z) = z + b \quad (\text{avec } b \in \mathbb{C})$$

On note  $\text{Tr}(\mathbb{C})$  l'ensemble des translations dans le plan complexe.

Montrer que  $(\text{Tr}(\mathbb{C}), \circ)$  est un groupe, en prouvant que c'est un sous-groupe de  $(\text{Bij}(\mathbb{C}), \circ)$ . Est-il abélien ?

**EXERCICE 11.** — (**Groupe des rotations dans le plan complexe**). On appelle **rotation dans le plan complexe** de centre  $\Omega(\omega)$  et d'angle  $\theta$  une application  $R_{\omega,\theta}$  définie sur  $\mathbb{C}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, R_{\omega,\theta}(z) = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega \quad (\text{avec } \Omega \in \mathbb{R} \text{ et } \omega \in \mathbb{C})$$

On note  $\text{Rot}(\mathbb{C})$  l'ensemble des rotations dans le plan complexe.

1/ Montrer que  $(\text{Rot}(\mathbb{C}), \circ)$  est un groupe, en prouvant que c'est un sous-groupe de  $(\text{Bij}(\mathbb{C}), \circ)$ . Est-il abélien ?

2/ On note  $\text{Rot}_0(\mathbb{C})$  l'ensemble des rotations de centre  $O$ . Montrer que  $(\text{Rot}_0(\mathbb{C}), \circ)$  est un sous-groupe de  $(\text{Rot}(\mathbb{C}), \circ)$ , et qu'il est abélien.

**EXERCICE 12.** — (**Groupe des homothéties dans le plan complexe**). On appelle **homothétie dans le plan complexe** de centre  $\Omega(\omega)$  et de rapport  $k$  une application  $H_{\omega,k}$  définie sur  $\mathbb{C}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, H_{\omega,k}(z) = k(z - \omega) + \omega \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \omega \in \mathbb{C})$$

On note  $\text{Hom}(\mathbb{C})$  l'ensemble des homothéties dans le plan complexe.

1/ Montrer que  $(\text{Hom}(\mathbb{C}), \circ)$  est un groupe, en prouvant que c'est un sous-groupe de  $(\text{Bij}(\mathbb{C}), \circ)$ . Est-il abélien ?

2/ On note  $\text{Hom}_0(\mathbb{C})$  l'ensemble des homothéties de centre  $O$ . Montrer que  $(\text{Hom}_0(\mathbb{C}), \circ)$  est un sous-groupe de  $(\text{Hom}(\mathbb{C}), \circ)$ , et qu'il est abélien.

**EXERCICE 13.** — (**Groupe des similitudes directes**). On rappelle que  $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$  désigne l'ensemble des applications de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .

- 1/ Justifier brièvement que la composition usuelle (notée “ $\circ$ ”) est une loi de composition interne sur  $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ , associative, et possédant un élément neutre.
- 2/  $(\mathbb{C}^{\mathbb{C}}, \circ)$  est-il un groupe ?
- 3/ Pour tout  $a \in \mathbb{C}^*$ , et pour tout  $b \in \mathbb{C}$  on définit l'application  $f_{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  par :  $f_{a,b}(z) = az + b$ .
  - a/ Calculer :  $f_{a',b'} \circ f_{a,b}$ .
  - b/ Montrer que  $(\{f_{a,b}; a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}, \circ)$  est un groupe. Ce groupe est-il abélien ?

**EXERCICE 14.** — Soient  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  les fonctions de  $\mathbb{R}^*$  dans  $\mathbb{R}^*$  définies par :

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = -x \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

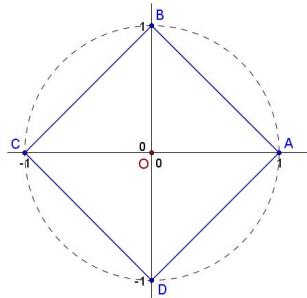
- 1/ Montrer que  $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  muni de la composition  $\circ$  est un groupe abélien.
- 2/ Déterminer l'ensemble de ses sous-groupes.

**EXERCICE 15.** — (**Centre d'un groupe**). Soit  $G$  un groupe. On appelle **centre de  $G$**  et on note  $Z(G)$  l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent avec tous les éléments de  $G$ , soit :  $Z(G) = \{a \in G, \forall g \in G, ag = ga\}$ . Montrer que  $Z(G)$  est un sous-groupe de  $G$ . Que devient  $Z(G)$  lorsque  $G$  est abélien ?

**EXERCICE 16.** — (**Groupe diédral  $D_3$** ). Décrire le groupe diédral  $(D_3, \circ)$ , c'est à dire le groupe des isométries du plan laissant invariant un triangle équilatéral de centre  $O$ .

**EXERCICE 17.** — (**Groupe diédral  $D_4$** ). La figure ci-dessous représente le carré  $ABCD$ , inscrit dans le cercle unité, les points  $A, B, C$  et  $D$  étant les images des racines quatrièmes de l'unité.

On dit qu'une transformation du plan **laisse le carré  $ABCD$  invariant** si l'image du carré  $ABCD$  par cette transformation est le carré  $ABCD$  lui-même.



- 1/ Enumérez les huit isométries laissant le carré  $ABCD$  invariant. On note  $D_4$  l'ensemble de ces isométries.
- 2/ Montrez que  $(D_4, \circ)$  est un groupe, non-abélien (*le groupe  $D_4$  est un exemple de ce que l'on appelle groupe diédral*).

**EXERCICE 18.** — (**Groupe symétrique  $S_3$** ). On appelle **groupe symétrique  $S_3$**  le groupe des permutations de  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ , c'est à dire le groupe des bijections de  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$  dans lui-même.

- 1/ Justifier que  $(S_3, \circ)$  est effectivement un groupe.
- 2/ Décrire en extension  $S_3$ .
- 3/ Décrire tous les sous-groupes de  $S_3$ .

**EXERCICE 19.** — (**Intersection et union de sous-groupes**). Soit  $(G, \star)$  un groupe,  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-groupes de  $G$ .

- 1/ Montrer que  $H_1 \cap H_2$  est un sous-groupe de  $G$ .
- 2/ Montrer que :  $[H_1 \cup H_2 \text{ est un sous-groupe de } G] \iff [H_1 \subset H_2 \text{ ou } H_2 \subset H_1]$

**EXERCICE 20. — (Groupe additif des polynômes).** Il est connu que  $(\mathbb{K}[X], +)$  est un groupe. Parmi les  $H_i$  proposés ci-dessous, lesquels sont des sous-groupes additifs de  $\mathbb{K}[X]$  ?

- 1/  $H_1$  l'ensemble des polynômes qui s'annulent en 1
- 2/  $H_2$  l'ensemble des polynômes de degré exactement 3
- 3/  $H_3$  l'ensemble des polynômes à coefficients entiers
- 4/  $H_4$  l'ensemble des polynômes représentant une fonction croissante sur  $\mathbb{R}$

**EXERCICE 21. — (Groupe additif des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ ).** Il est connu que  $(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$  est un groupe. Parmi les  $H_i$  proposés ci-dessous, lesquels sont des sous-groupes additifs de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ?

- 1/  $H_1$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  qui s'annulent en 1
- 2/  $H_2$  l'ensemble des fonctions constantes sur  $\mathbb{R}$
- 3/  $H_3$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  qui sont bornées
- 4/  $H_4$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  qui réalisent une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

**EXERCICE 22. — (Groupe additif des suites réelles).** Il est connu que  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$  est un groupe. Parmi les  $H_i$  proposés ci-dessous, lesquels sont des sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ?

- |  |   |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1/ <math>H_1</math> l'ensemble des suites de limite 1</li> <li>2/ <math>H_2</math> l'ensemble des suites arithmétiques</li> <li>3/ <math>H_3</math> l'ensemble des suites géométriques</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>4/ <math>H_4</math> l'ensemble des suites croissantes</li> <li>5/ <math>H_5</math> l'ensemble des suites stationnaires</li> <li>6/ <math>H_6</math> l'ensemble des suites périodiques</li> </ol> |
|--|---|

### MORPHISMES DE GROUPES

**EXERCICE 23. — (Généralités sur les morphismes de groupes).** Soient  $(G, *)$  et  $(H, \sharp)$  deux groupes. On appelle **morphisme de groupes** une application  $f : G \rightarrow H$  telle que

$$\forall (g, g') \in G^2, \quad f(g * g') = f(g) \sharp f(g')$$

Soit  $f$  un morphisme de groupes.

- 1/ Montrer que  $f(e_G) = e_H$
- 2/ Montrer que  $f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$
- 3/ On définit le **noyau de  $f$** , et on note  $\ker f$  la partie de  $G$  constituée des antécédents de  $e_H$  par  $f$ .<sup>\*</sup>  
Explicitement :

$$\ker f = \{g \in G / f(g) = e_H\}$$

- a/ Montrer que  $\ker f$  est un sous-groupe de  $G$ .
- b/ Montrer que le morphisme  $f$  est injectif SSI  $\ker f = \{e_G\}$
- 4/ On définit l'**image de  $f$** , et on note  $\text{im } f$  l'image directe de  $G$  par  $f$ . En d'autres termes :

$$\text{im } f = f(G) = \{h \in H, \exists g \in G, f(g) = h\}$$

- a/ Montrer que  $\text{im } f$  est un sous-groupe de  $H$ .
- b/ Justifier que  $f$  est surjective SSI  $\text{im } f = H$ .

**EXERCICE 24. — (Groupe des automorphismes).** Soit  $(G, *)$  un groupe. On appelle **automorphisme** du groupe  $G$  un isomorphisme de groupes de  $G$  dans  $G$ . On note  $\text{Aut}(G)$  l'ensemble des automorphismes de  $G$ .

Montrer que  $(\text{Aut}(G), \circ)$  est un groupe.

\*. La notation *ker* vient de *kernel* (noyau en anglais) et/ou de *kern* (noyau en allemand).

**EXERCICE 25.** — Montrer que l’application  $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$  est un isomorphisme de groupes.

$$x \longmapsto e^{2x}$$

**EXERCICE 26.** — Soit  $n$  un entier naturel  $\geq 2$ . On considère l’application :  $f : (\mathbb{C}^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$

$$z \longmapsto z^n$$

1/ Montrer que  $f$  est un morphisme de groupes.

2/ Déterminer le noyau de  $f$ . Le morphisme  $f$  est-il injectif ?

3/ Justifier que le morphisme  $f$  est surjectif.

**EXERCICE 27.** — On considère l’application :  $f : (\mathbb{U}_8, \times) \longrightarrow (\mathbb{U}_4, \times)$

$$z \longmapsto z^2$$

1/ Montrer que l’application  $f$  est bien définie, càd justifier que :  $f(\mathbb{U}_8) \subset \mathbb{U}_4$ .

2/ Montrer que  $f$  est un morphisme de groupes, et qu’il est surjectif.

3/ Déterminer le noyau de  $f$ . Est-il injectif ?

**EXERCICE 28.** — On considère l’application<sup>†</sup> :  $f : (\mathbb{R}_2[X], +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$

$$P \longmapsto \int_0^1 P(t) dt$$

1/ Montrer que  $f$  est un morphisme de groupes.

2/ Déterminer le noyau de  $f$ . Le morphisme  $f$  est-il injectif ?

3/ Justifier que le morphisme  $f$  est surjectif.

**EXERCICE 29.** — Lorsque  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est une matrice de  $M_2(\mathbb{R})$ , on appelle **déterminant** de  $A$  et on note  $\det(A)$  (ou  $|A|$ ) le réel :

$$\det(A) = ad - bc$$

Par ailleurs, on note  $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$  le groupe multiplicatif des matrices inversibles (càd de déterminant non nul) de  $M_2(\mathbb{R})$ .

1/ Etablir que l’application  $\det : (GL_2(\mathbb{R}), \times) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$  est un morphisme de groupes.

$$A \longmapsto \det(A)$$

2/ Quel est le noyau du morphisme  $\det$  ?

3/ Justifier que le morphisme  $\det$  est surjectif.

**EXERCICE 30.** — On considère l’application :  $\Delta : (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +) \longrightarrow (\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$

$$f \longmapsto f'$$

1/ Justifier que  $\Delta$  est un morphisme de groupes, et qu’il est surjectif.

2/ Déterminer le noyau de  $\Delta$ . Est-il injectif ?

**EXERCICE 31.** — Montrer que  $(\text{Tr}(\mathbb{C}), \circ)$  et  $(\mathbb{C}, +)$  sont isomorphes.

**EXERCICE 32.** — Montrer que  $(D_3, \circ)$  et  $(S_3, \circ)$  sont isomorphes.

<sup>†</sup>. On rappelle que  $\mathbb{R}_2[X]$  désigne l’ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. Explicitement, tout élément de  $\mathbb{R}_2[X]$  peut s’écrire  $aX^2 + bX + c$ , avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

**EXERCICE 33.** — Montrer que  $(D_4, \circ)$  et  $(S_4, \circ)$  ne sont pas isomorphes.

ANNEAUX, CORPS

**EXERCICE 34.** — On note  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Montrer que  $(\mathbb{K}[X], +, \times)$  est un anneau commutatif. Est-ce encore vrai si l'on remplace  $\mathbb{K}[X]$  par  $\mathbb{K}_n[X]$  ?

**EXERCICE 35.** — Montrer que  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau commutatif. Est-il intègre ?

**EXERCICE 36.** — (**Anneau des entiers de Gauss**). On pose  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ . Montrer que  $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$  est un anneau commutatif. Est-ce un corps ?

**EXERCICE 37.** — On pose  $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ . Montrer que  $(\mathbb{Q}[i], +, \times)$  est un corps.

**EXERCICE 38.** — On note  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  l'ensemble des nombres réels pouvant s'écrire  $a + b\sqrt{2}$  (avec  $a \in \mathbb{Q}$  et  $b \in \mathbb{Q}$ ). Montrer que  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  est un sous-corps de  $(\mathbb{R}, +, \times)$ .

**EXERCICE 39.** — (**Eléments nilpotents dans un anneau**). Soit  $(A, +, \times)$  un anneau.

Un élément  $a$  de  $A$  est dit **nilpotent** s'il existe un entier naturel  $n$  non nul tel que  $a^n = 0_A$ .

1/ Soit  $a \in A$ . On suppose que  $a$  est nilpotent. Montrer que  $a$  n'est pas inversible.

2/ Soient  $a$  et  $b$  deux éléments nilpotents de  $A$ . **On suppose que**  $ab = ba$ .

a/ Montrer que  $ab$  est nilpotent.

b/ Montrer que  $a + b$  est nilpotent.

3/ Soit  $a \in A$ . On suppose que  $a$  est nilpotent. Montrer que  $1_A - a$  est inversible, et déterminer son inverse.

**EXERCICE 40.** — Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les applications :

$$\begin{array}{ccc} \Delta : (\mathbb{R}_n[X], +) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_n[X], +) \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \varphi : (\mathbb{R}_n[X], +) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_n[X], +) \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array}$$

1/ Justifier brièvement que  $\Delta$  et  $\varphi$  sont des morphismes de groupes.

2/ Etablir que  $\Delta^{n+1} = 0$ .

3/ Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de groupes, et déterminer explicitement  $\varphi^{-1}$ .

**EXERCICE 41.** — (**Anneau des entiers de Gauss**). On pose  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$  et  $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ . Il a déjà été établi au cours des exercices précédents que le premier est un anneau commutatif, et le second un corps.

On définit l'application  $N : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N}$  par :  $\forall z \in \mathbb{Z}[i], N(z) = z\bar{z}$ .

1/ Montrer que pour tout  $(z, z') \in \mathbb{Z}[i]^2$ ,  $N(zz') = N(z)N(z')$ .

2/ En déduire que :  $z$  est inversible dans  $\mathbb{Z}[i] \iff N(z) = 1$

3/ Déterminer l'ensemble des éléments inversibles de  $\mathbb{Z}[i]$ . Vérifier qu'il s'agit d'un groupe bien connu.

**EXERCICE 42.** — Soit  $F$  un sous-corps de  $(\mathbb{Q}, +, \times)$ . Montrer que  $F = \mathbb{Q}$ .

## GROUPES, ANNEAUX, CORPS : MAINTENANT, TESTEZ-VOUS !

En prévision des futures évaluations, vous devez pouvoir répondre sans coup férir aux rapides questions suivantes, qui vous permettront de savoir si vous avez retenu les principaux mécanismes relatifs aux groupes, anneaux et corps.

NB : une ou plusieurs questions pourront vous être posées rapidement en début de colle 13.

A propos des groupes

- 1/ Citer de mémoire 4 exemples de groupes : deux abéliens et deux non abéliens.
- 2/ Le produit scalaire est une  $\ell$ ci sur  $\mathbb{R}^2$ .  Oui  Non
- 3/  $(\mathbb{R}, -)$  est un groupe.  Oui  Non
- 4/ Si  $E$  est un ensemble non vide,  $(E^E, \circ)$  est un groupe.  Oui  Non
- 5/ Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles non vides, l'ensemble des bijections de  $E$  dans  $F$  est un groupe pour la composition.  Oui  Non
- 6/ L'ensemble des similitudes directes, muni de la composition, est un groupe abélien.  Oui  Non
- 7/ L'ensemble des rotations de centre  $O$ , muni de la composition, est un groupe abélien.  Oui  Non
- 8/ L'ensemble des homothéties, muni de la composition, est un groupe.  Oui  Non
- 9/  $(\mathbb{K}_n[X], +)$  est un groupe.  Oui  Non
- 10/ Tout sous-groupe de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  est non abélien.  Oui  Non

A propos des anneaux

- 11/ Citer de mémoire 4 exemples d'anneaux, dont au moins deux non intègres.
- 12/  $(\mathbb{N}, +, \times)$  est un anneau.  Oui  Non
- 13/  $(\mathbb{R}_+^*, +, \times)$  est un anneau.  Oui  Non
- 14/ Les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  suivants constituent-ils des sous-anneaux de  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$  ?
  - a/ L'ensemble des suites de limite 0.  Oui  Non
  - b/ L'ensemble des suites de limite 1.  Oui  Non
  - c/ L'ensemble des suites convergentes.  Oui  Non
  - d/ L'ensemble des suites divergentes.  Oui  Non
  - e/ L'ensemble des suites positives.  Oui  Non
  - f/ L'ensemble des suites bornées.  Oui  Non
  - g/ L'ensemble des suites périodiques.  Oui  Non
- 15/ Les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  suivants constituent-ils des sous-anneaux de  $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$  ? L'ensemble...
  - a/ ... des fonctions continues et tendant vers 0 en  $+\infty$ .  Oui  Non
  - b/ ... des fonctions continues et tendant vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .  Oui  Non
  - c/ ... des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .  Oui  Non
  - d/ ... des combinaisons linéaires de cos et de sin (“ $f = \lambda \cos + \mu \sin$ ”).  Oui  Non
  - e/ ... des fonctions continues et  $2\pi$ -périodiques.  Oui  Non

---

16/  $\dagger$  Les sous-ensembles de  $M_2(\mathbb{R})$  suivants constituent-ils des sous-anneaux de  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ ? L'ensemble...

a/ ... des matrices inversibles.  Oui  Non

b/ ... des matrices diagonales, càd de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ .  Oui  Non

c/ ... des matrices triangulaires supérieures, càd de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ .  Oui  Non

d/ ... des matrices scalaires, càd de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ .  Oui  Non

e/ ... des matrices symétriques, càd de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ .  Oui  Non

f/ ... des matrices antisymétriques, càd de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ .  Oui  Non

A propos des corps

17/ Citer de mémoire 3 exemples de corps, et 3 exemples d'anneaux commutatifs qui ne sont pas des corps.

18/  $\mathbb{Z}$  est un corps.  Oui  Non

19/  $\mathbb{R}_+^*$  est un corps.  Oui  Non

20/  $\mathbb{R}$  est un corps.  Oui  Non

21/  $\mathbb{K}[X]$  est un corps.  Oui  Non

22/  $\mathbb{C}$  n'a d'autre sous-corps que  $\mathbb{C}$  lui-même.  Oui  Non

23/  $\mathbb{Q}$  n'a d'autre sous-corps que  $\mathbb{Q}$  lui-même.  Oui  Non

---

$\ddagger$ . Attendre le prochain chapitre pour répondre à cette question.