MPSI – Colle 12 (15 au 19 décembre 2025) : Suites réelles et complexes

Chapitre 11 : Suites réelles et complexes

1 - Généralités sur les suites réelles

Catalogue de définitions : suite **majorée**, **minorée**, **bornée**, **croissante**, **décroissante**, **monotone**, **constante**, **stationnaire**, **périodique**.

Lemme : u est bornée SSI $\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$.

2 - Limite d'une suite réelle

Définition : soient u une suite et ℓ un réel. u **converge vers** ℓ (ou a pour limite ℓ) si : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

La suite u diverge si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si elle n'a pas de limite finie.

Lemme : u converge vers ℓ SSI $(u - \ell)$ converge vers 0.

Propriété (unicité de la limite) : si u est une suite convergente, alors sa limite est unique.

Propriété : toute suite convergente est bornée *(réciproque fausse : la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée, mais ne converge pas)*

Propriétés (algébriques des limites) : soient u et v deux suites, de limites respectives ℓ et ℓ'.

1/ $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$

2/ uv converge vers $\ell\ell'$

3/ $1/v$ converge vers $1/\ell'$ (sous réserve que $\ell' \neq 0$)

4/ u/v converge vers ℓ/ℓ' (sous réserve que $\ell' \neq 0$)

Corollaire : toute combinaison linéaire de suites convergentes est convergente.

Propriété : si u est bornée, et v converge vers 0, alors uv converge vers 0.

Définition : soit u une suite. u **diverge vers** $+\infty$ (ou a pour limite $+\infty$) si : $\forall\, M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant M)$. Et de manière analogue, u **diverge vers** $-\infty$ si : $\forall\, M < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant M)$.

Exemples : la suite de terme général n^2 diverge vers $+\infty$.

Lemme : si u diverge vers $+\infty$, alors $1/u$ existe à partir d'un certain rang et converge vers 0.

3 - Suites REELLES et inégalités

Propriété : soient u et v deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Si $u \leqslant v$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Théorème (de comparaison) : soient u et v deux suites telles que :

- à partir d'un certain rang : $u \leqslant v$ (*resp.* $u \geqslant v$)
- $\lim u = +\infty$ (*resp.* $-\infty$)

Alors $\lim v = +\infty$ (*resp.* $-\infty$).

Théorème (d'encadrement ou "des gendarmes") : soient u, v et w trois suites telles que :

- à partir d'un certain rang : $u \leqslant v \leqslant w$
- u et w sont convergentes
- $\lim u = \lim w$

Alors v converge et $\lim v = \lim u = \lim w$.

4 - Suites REELLES et monotonie

Théorème (de la limite monotone) : toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

Définition : deux suites u et v sont **adjacentes** si :

- u et v sont monotones, de monotonies opposées
- $\lim\,(v - u) = 0$

Théorème (des suites adjacentes) : deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

5 - Suites extraites

Définition : soit $(u_n)_n$ une suite. Une suite $(v_n)_n$ est une **suite extraite de** $(u_n)_n$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

Lemme : si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.

Propriété fondamentale des suites extraites. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si (u_n) a pour limite ℓ, alors toute suite extraite de (u_n) a pour limite ℓ.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

Remarque : si l'énoncé est clair pour la suite de terme général $(-1)^n$, elle l'est nettement moins pour celle de terme général $\cos(n)$...

Application (par anticipation) : toute fonction continue sur un segment à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes (*théorème des bornes atteintes*).

6 - Suites complexes

Définition : une suite complexe u est **bornée** si : $\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$.

Définition : une suite complexe u **converge vers** $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

Propriété : toute suite complexe convergente est bornée.

Propriété ("pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$") : soient u une suite complexe, et ℓ un nombre complexe.

u converge vers ℓ SSI $\mathrm{Re}\, u$ converge vers $\mathrm{Re}\, \ell$ et $\mathrm{Im}\, u$ converge vers $\mathrm{Im}\, \ell$

Application : la suite de terme général $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n\theta}$ converge SSI $\theta = 0\ [2\pi]$.

7 - Suites particulières

7.1 - Suites arithmétiques

7.2 - Suites géométriques

7.3 - Suites arithmético-géométriques

Définition : une suite u est **arithmético-géométrique** (SAG) s'il existe deux complexes a et b tels que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

Théorème : avec les notations de la définition ci-dessus, avec $a \neq 1$ et $u_0 \neq \ell$.

Si $|a| < 1$, alors la suite u converge et a pour limite ℓ, en ayant posé : $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

Si $|a| > 1$, la suite u diverge.

Remarque : le point-clef du théorème ci-dessus est l'énoncé suivant.

Lemme : toujours avec les mêmes hypothèses et notations. La suite $(u - \ell)$ est géométrique de raison a. Par suite : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \ell + (u_0 - \ell) \times a^n$.

7.4 - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (SRL2)

Définition : une suite u est **récurrente linéaire d'ordre 2**, si :

$$\exists\ (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad (\star)$$

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (SRL2) est donc entièrement déterminée par les complexes a et b, et ses deux premiers termes (u_0 et u_1).

Définition : avec les notations de la définition ci-dessus, on appelle **équation caractéristique** associée à la relation $(\star)$ l'équation $(EC)\ \ X^2 - aX - b = 0$.

Remarque-clef : soit $q \in \mathbb{C}^*$. La suite $(q^n)_n$ vérifie $(\star)$ SSI q est racine de (EC) (ou $q = 0$).

Théorème *(terme général d'une SRL2, cas COMPLEXE)* : soit $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. On note $(\star)$ l'assertion $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$; E l'ensemble des suites complexes vérifiant $(\star)$; (EC) l'équation $X^2 - aX - b = 0$ et Δ le discriminant de (EC).

- Si $\Delta \neq 0$: (EC) a deux racines distinctes r_1 et r_2, et $u \in E$ SSI :
$$\exists\, (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$
- Si $\Delta = 0$: (EC) a une racine double r_0, et $u \in E$ SSI :
$$\exists\, (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (C_1 + nC_2)\, r_0^n$$

Théorème *(expression du terme général d'une SRL2, cas REEL)* : soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Pour le reste, mêmes notations que ci-dessus.

- Si $\Delta > 0$: (EC) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, et $u \in E$ SSI :
$$\exists\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$
- Si $\Delta = 0$: (EC) a une racine réelle double r_0, et $u \in E$ SSI :
$$\exists\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (C_1 + nC_2)\, r_0^n$$
- Si $\Delta < 0$: (E) a deux racines complexes conjuguées $re^{\pm \mathrm{i}\theta}$, et $u \in E$ SSI :
$$\exists\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n \left(C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)\right)$$

Application : terme général de la *suite de Fibonacci*, définie par ses deux premiers termes $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et la relation de récurrence $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Questions de cours

- **Théorème de comparaison**
- **Propriété - Stabilité des inégalités larges par passage à la limite**
- **Théorème de la limite monotone**
- **Théorème d'encadrement ou "des gendarmes"**
- **Propriété fondamentale des suites extraites**
- **Théorème de Bolzano-Weierstrass (sur le principe du "volontariat")**