Colle 14 – Questions de cours

Remarque : la transposée d'une matrice A pourra être notée ${}^TA$, ${}^tA$, A^T ou A^t en fonction de la direction du vent, ou de la valeur modulo 4 du jour de la semaine où on l'écrit.

Question de cours 1. — **Propriété** : la matrice identité I_n est l'élément neutre pour le produit matriciel. *On montrera ici que : $\forall\, A \in M_n(\mathbb{K})\,,\ A \times I_n = A$ et on pourra admettre $I_n \times A = A$.*

Soient n un entier naturel non nul, et $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Notons $P = (p_{ij})$ la matrice produit $A \times \mathrm{I}_n$. On rappelle que $\forall\,(i,j) \in [\![\, 1, n \,]\!]^2,\ (\mathrm{I}_n)_{ij} = \delta_{ij}$.*

Soient i et j deux entiers de $[\![\, 1, n \,]\!]$. On a : $P_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(\mathrm{I}_n)_{kj}$.

Or $(\mathrm{I}_n)_{kj} = 0$ pour $k \neq j$, et $(\mathrm{I}_n)_{jj} = 1$. Il s'ensuit que : $P_{ij} = a_{ij}$.

En résumé : $\forall\,(i,j) \in [\![\, 1, n \,]\!]^2,\ P_{ij} = a_{ij}$. Donc $P = A$, et donc : $\boxed{A \times \mathrm{I}_n = A}$.

Question de cours 2. — **Théorème** : toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, soit

$$\forall\, M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\,,\ \exists!\ (S, A) \in\ S_n(\mathbb{K}) \times A_n(\mathbb{K})\,,\ M = S + A$$

On raisonne par analyse-synthèse. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

➤ Analyse : supposons qu'il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A telles que : $M = S + A$.

Alors : ${}^tM = {}^tS + {}^tA$. Or par hypothèse ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$. On a donc : ${}^tM = S - A$.

Il s'ensuit que S et A sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{lcl} S + A & = & M \\ S - A & = & {}^tM \end{array}\right.$

La résolution aisée de celui-ci donne : $S = \dfrac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$ et $A = \dfrac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$.

➤ Synthèse : il ne reste plus qu'à vérifier que le couple (S, A) obtenu précédemment convient. Pour cela on commence par s'assurer que $M = S + A$ (trivial). En outre :

➢ en posant $S = \dfrac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$, on a : ${}^tS = \dfrac{1}{2}\left({}^tM + {}^t({}^tM)\right) = \dfrac{1}{2}\left({}^tM + M\right) = \dfrac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) = S$; donc S est symétrique ;

➢ et en posant $A = \dfrac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$, on a : ${}^tA = \dfrac{1}{2}\left({}^tM - M\right) = -\dfrac{1}{2}\left(M - {}^tM\right) = -A$; donc A est antisymétrique.

> Conclusion (partielle) : on a établi l'existence, pour toute matrice carrée M d'un couple (S, A) (avec S symétrique et A antisymétrique) tel que : $M = S + A$.
>
> En outre, ce couple est explicitement donné par les formules : $S = \dfrac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$ et $A = \dfrac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$.

L'unicité du couple (S, A) provient de l'unicité de la solution du système obtenu dans la partie analyse.

Question de cours 3. — **Propriété de la trace** : $\forall\,(A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2\,,\ \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$

Preuve. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

D'une part : $\mathrm{tr}\,(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$.

D'autre part : $\mathrm{tr}\,(BA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{ik}$.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)}$

---

*. Où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, càd : $\delta_{ij} = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$.

Question de cours 4. — **Propriété (linéarité de la trace)** : $\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \mathrm{tr}(\lambda A+\mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$

Soient $(A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$\mathrm{tr}(\lambda A+\mu B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A+\mu B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii}+\mu b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$$

Conclusion. $\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \mathrm{tr}(\lambda A+\mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$

Question de cours 5. — **Propriété** : $\mathrm{S}_N(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.

Soient A et B dans $\mathrm{S}_N(\mathbb{K})$, λ et μ deux scalaires. On a :

$$(\lambda A+\mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda A + \mu B$$

la première égalité provenant de la linéarité du passage à la transposée, et la seconde de l'hypothèse de symétrie faite sur A et B. On en déduit que $\lambda A+\mu B$ est symétrique, d'où la conclusion.

Question de cours 6. — **Propriété** : $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \times \mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n)$

Soient $2n$ scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n$. Posons $A = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $B = \mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$ et $P = AB$.

➤ Commençons par montrer que P est diagonale : soient i et h deux entiers de $[\![1,n]\!]$ tels que $i \neq j$.

Alors : $P_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{ii}b_{ij} = \lambda_i \times \underbrace{b_{ij}}_{=0\ (B\ \mathrm{diag})} = 0.$

Ainsi : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [i \neq j] \Longrightarrow [P_{ij} = 0]$. D'où : P est diagonale.

➤ Déterminons à présent les coefficients diagonaux de P. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a :

$$P_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = a_{ii}b_{ii} = \lambda_i\mu_i$$

Ainsi : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ P_{ii} = \lambda_i\mu_i$.

Conclusion. P est diagonale et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ P_{ii} = \lambda_i\mu_i$. Ainsi :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \times \mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n)$$

Banque d'exercices

Exercice 1. — Donner des exemples de matrices A et B de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ illustrant les situations suivantes :

- $AB \neq BA$
- $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$
- $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ avec A et B diagonales
- $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, mais $A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

Exercice 2. — Pour tout entier naturel N, calculer A^N avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. — Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose que A et B sont semblables, càd qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Montrer que : $B^N = P^{-1}A^N P$ pour tout entier naturel N.

Exercice 4. — Montrer que $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 5. — **(Commutant d'une matrice)**. Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{COM}(A)$ le commutant de la matrice A, c'est à dire l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A :

$$\mathrm{COM}(A) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$$

Montrer que $(\mathrm{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +)$.

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Donner des exemples de matrices A et B de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ illustrant les situations suivantes :

- $AB \neq BA$

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

- $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

- $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ avec A et B diagonales

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

- $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, mais $A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a : $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

Exercice 2. — Pour tout entier naturel N, calculer A^N avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Observons que : $A = 2\mathrm{I}_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

➤ On a : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})}$. Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N},\ (k \geqslant 3) \Longrightarrow \left(B^k = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})}\right) \quad (\spadesuit)$.[†]

➤ On a : $(2\mathrm{I}_3) \times B = B \times (2\mathrm{I}_3) \quad (\clubsuit)$. En effet, toute matrice de la forme $(\lambda\, \mathrm{I}_3)$[‡] commute avec toute matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$.

➤ Soit N un entier naturel. On a : $A^N = (2\mathrm{I}_3 + B)^N$. Grâce à $(\clubsuit)$, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire :

$$A^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} B^k \, (2\mathrm{I}_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} B^k$$

D'après $(\spadesuit)$, on a encore : $$A^N = \sum_{k=0}^{2} \binom{N}{k} 2^{N-k} B^k = 2^N \underbrace{B^0}_{=\mathrm{I}_3} + N2^{N-1}B + \frac{N(N-1)}{2}\, 2^{N-2} B^2$$

Explicitement :

$$A^N = \begin{pmatrix} 2^N & 0 & 0 \\ 0 & 2^N & 0 \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & N2^{N-1} & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & N(N-1)2^{N-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où finalement : $$\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ A^N = \begin{pmatrix} 2^N & N2^{N-1} & N\,(N+3)\,2^{N-3} \\ 0 & 2^N & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix}}$$

---

†. Ainsi la matrice B est nilpotente.

‡. Une telle matrice est appelée matrice **scalaire**.

Exercice 3. — Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que si A et B sont semblables, alors A^N et B^N sont semblables pour tout entier naturel N.

Supposons A et B semblables : $\exists\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

Pour tout entier naturel N, notons $\mathscr{P}(N)$ l'assertion : "$B^N = P^{-1}A^NP$".

L'initialisation (pour $N = 0$) est immédiate puisque $B^0 = \mathrm{I}_n$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}\mathrm{I}_nP = P^{-1}P = \mathrm{I}_n$.

Passons à l'hérédité : supposons $\mathscr{P}(N)$ vraie pour un certain entier naturel N.

Alors, en utilisant notamment l'hypothèse de récurrence et l'associativité du produit matriciel :

$$B^{N+1} = B^N \times B = \left(P^{-1}A^NP\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A^N\left(PP^{-1}\right)AP = P^{-1}A^{N+1}P$$

Ainsi : $B^{N+1} = P^{-1}A^{N+1}P$. Ce qui assure que $\mathscr{P}(N+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. Si A et B (dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$) sont semblables, alors A^N et B^N sont semblables pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. — Montrer que $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Soient $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$[PX = B] \iff \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & b_2 & (L_2) \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & b_3 & (L_3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 & = & b_1 + 2b_2 & (L_2) \longleftarrow (L_1) + 2(L_2) \\ x_2 + x_3 & = & b_1 + 2b_3 & (L_3) \longleftarrow (L_1) + 2(L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 & = & b_1 + 2b_2 & (L_2) \\ 2x_3 & = & 2b_2 - 2b_3 & (L_3) \longleftarrow (L_2) - (L_3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 & = & b_1 + 2b_2 & (L_2) \\ x_3 & = & b_2 - b_3 & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 & = & 2b_1 + 2b_3 & (L_1) \\ x_2 & = & b_1 - b_2 + 3b_3 & (L_2) \\ x_3 & = & b_2 - b_3 & (L_3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x_1 & = & b_1 + b_3 & (L_1) \\ x_2 & = & b_1 - b_2 + 3b_3 & (L_2) \\ x_3 & = & b_2 - b_3 & (L_3) \end{array}\right.$$

Conclusion. $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5. — **(Commutant d'une matrice)**. Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{COM}(A)$ le commutant de la matrice A, c'est à dire l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A :

$$\mathrm{COM}(A) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$$

Montrer que $(\mathrm{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +)$.

Il suffit de vérifier les quatre axiomes assurant que $(\mathrm{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +)$.

Les axiomes SG1 ($\mathrm{COM}(A) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$) et SG2 ($0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})} \in \mathrm{COM}(A)$) sont évidemment réalisés.

Il est à peine moins évident de vérifier que $\mathrm{COM}(A)$ est stable par somme (SG3) :

Si M et $N \in \mathrm{COM}(A)$, alors : $(M+N)A = MA + NA = AM + AN = A(M+N)$. D'où : $(M+N) \in \mathrm{COM}(A)$

Enfin, $\mathrm{COM}(A)$ est stable par passage à l'opposé (SG4) :

Si $M \in \mathrm{COM}(A)$, alors : $(-M)A = -(MA) = -(AM) = A \times (-M)$. D'où : $(-M) \in \mathrm{COM}(A)$

Conclusion. $\mathrm{COM}(A)$ est une partie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, contenant $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ (l'élément neutre pour l'addition dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$), stable par somme et par passage à l'opposé. Il s'ensuit que $(\mathrm{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +)$.

En particulier, $(\mathrm{COM}(A), +)$ est un groupe (abélien).