

EXERCICES 13 – CALCUL MATRICIEL – CORRIGÉ

PRODUITS ET PUISSANCES DE MATRICES

EXERCICE 1. — Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le produit de deux matrices $M \times N$ est défini si et seulement si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N .

Par conséquent, les produits :

$$AC, BD, CB, CD, DA, DC, A^2 \text{ et } B^2$$

ne sont pas définis.

Pour les autres produits, on a :

$$\left| \begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ -6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\ AD = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \\ BA = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} BC = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} \\ CA = \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} \\ DB = \begin{pmatrix} 14 & -1 & -5 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 7 \\ 0 & 22 & 7 \\ 0 & -21 & 1 \end{pmatrix} \\ D^2 = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \right|$$

EXERCICE 2. — Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1/ Déterminer toutes les matrices B de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}). \text{ On a : } AB = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion. Soit $B \in M_2(\mathbb{R})$. On a : $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})} \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, B = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix}$.

2/ Déterminer toutes les matrices C de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

$$\text{Soit } C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}). \text{ D'après la question précédente :}$$

$$AC = 0_{M_2(\mathbb{R})} \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, C = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors : } CA = \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix}.$$

Conclusion. Soit $C \in M_2(\mathbb{R})$. On a : $[AC = 0_{M_2(\mathbb{R})} \wedge CA = 0_{M_2(\mathbb{R})}] \iff [\exists y \in \mathbb{R}, C = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & -y \end{pmatrix}]$.

EXERCICE 3. — (**Commutant d'une matrice diagonale dans $M_2(\mathbb{K})$**). Déterminer le **commutant** de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (a et b réels distincts), c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in M_2(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$.

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On a :

$$AM = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} ax & by \\ az & bt \end{pmatrix}$$

On a : $[AM = MA] \iff [bz = az \wedge ay = by] \iff [z = 0 \wedge y = 0]$

Conclusion. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. On a : $[AM = MA] \iff [\exists (x, t) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}]$.

EXERCICE 4. — (**Commutant d'une matrice**). Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices de $M_2(\mathbb{K})$ qui **commutent** avec A , c'est-à-dire l'ensemble des matrices M de $M_2(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$.*

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On a :

$$AM = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} ax & by \\ az & bt \end{pmatrix}$$

On a : $[AM = MA] \iff [bz = az \wedge ay = by] \iff [z = 0 \wedge y = 0]$

Conclusion. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. On a : $[AM = MA] \iff [\exists (x, t) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}]$.

EXERCICE 5. — (**Commutant d'une matrice diagonale, cas général**). Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels distincts, et D la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec D .

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n scalaires distincts. Notons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Une matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dans le commutant de D si et seulement si $MD = DM$.

Or : $MD = DM \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (MD)_{ij} = (DM)_{ij}$

$$\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \sum_{k=1}^n m_{ik}d_{kj} = \sum_{k=1}^n d_{ik}m_{kj}$$

$$\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{ij}d_{jj} = d_{ii}m_{ij}$$

$$\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{ij}\lambda_j = \lambda_i m_{ij}$$

$$\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (\lambda_j - \lambda_i) m_{ij} = 0$$

D'où, puisque l'on a supposé les λ_i distincts : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies m_{ij} = 0$

*. L'ensemble de ces matrices est appelé le **commutant** de la matrice A .

On en déduit que les matrices M commutant avec D sont celles dont tous les coefficients situés en dehors de la diagonale ($i \neq j$) sont nuls ; en d'autres termes, ce sont exactement les matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$.

Conclusion : le commutant de D est l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$.

EXERCICE 6. — **(Commutant d'une matrice, encore).** Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $\text{COM}(A)$ le commutant de la matrice A , que l'on ne présente plus. Montrer que $(\text{COM}(A), +)$ est un groupe.

Il suffit de vérifier les quatre axiomes assurant que $(\text{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(M_n(\mathbb{K}), +)$.

Les axiomes SG1 ($\text{COM}(A) \subset M_n(\mathbb{K})$) et SG2 ($0_{M_n(\mathbb{K})} \in \text{COM}(A)$) sont évidemment réalisés.

Il est à peine moins évident de vérifier que $\text{COM}(A)$ est stable par somme (SG3) :

$$\begin{aligned} \text{Si } M \text{ et } N \in \text{COM}(A), \text{ alors : } (M + N)A &= MA + NA = AM + AN = A(M + N). \text{ D'où :} \\ (M + N) &\in \text{COM}(A) \end{aligned}$$

Enfin, $\text{COM}(A)$ est stable par passage à l'opposé (SG4) :

$$\text{Si } M \in \text{COM}(A), \text{ alors : } (-M)A = -(MA) = -(AM) = A \times (-M). \text{ D'où : } (-M) \in \text{COM}(A)$$

Conclusion. $\text{COM}(A)$ est une partie de $M_n(\mathbb{K})$, contenant $0_{M_n(\mathbb{K})}$ (l'élément neutre pour l'addition dans $M_n(\mathbb{K})$), stable par somme et par passage à l'opposé. Il s'ensuit que $(\text{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(M_n(\mathbb{K}), +)$.

En particulier, $(\text{COM}(A), +)$ est un groupe (abélien).

EXERCICE 7. — Dans chacun des cas suivants, calculer A^n pour tout entier naturel n .

$$1/\text{ Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{La matrice } A \text{ est nilpotente puisque } A^2 = 0_{M_2(\mathbb{K})}$$

Conclusion. $A^0 = I_2$; $A^1 = A$; et $A^n = 0_{M_2(\mathbb{K})}$ pour tout entier $n \geq 2$.

$$2/\text{ Soit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

On a : $A = aI_2 + B$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice de la question précédente.

Puisque les matrices aI_2 et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n .

Soit n un entier naturel, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (aI_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} a^{n-k} B^k = a^n I_2 + na^{n-1} B$$

$$\text{Conclusion. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

3/ Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

On a : $A = 3\mathbf{I}_2 + B$, avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B^n = 2^{n-1}B$.

Puisque les matrices $3\mathbf{I}_2$ et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n .

Soit n un entier naturel, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (3\mathbf{I}_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k = 3^n \mathbf{I}_2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} 2^{k-1} B = 3^n \mathbf{I}_2 + \frac{5^n - 3^n}{2} B$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^n + 3^n & 5^n - 3^n \\ 5^n - 3^n & 5^n + 3^n \end{pmatrix}$

4/ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a : $A = \mathbf{I}_3 + B$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut observer que B est nilpotente puisque :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

Puisque les matrices \mathbf{I}_3 et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n .

Soit n un entier naturel, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (\mathbf{I}_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} B^k = \mathbf{I}_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + n(n-1)ac/2 \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5/ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a : $A = D + B$, avec $D = \text{diag}(1, 1, 2)$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut observer que B est nilpotente puisque : $B^2 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

En outre, on peut vérifier que $BD = DB$.

On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n .

Soit n un entier naturel, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k D^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k \text{diag}(1, 1, 2^{n-k}) = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} B^k \text{diag}(1, 1, 2^{n-k}) \\ &= \text{diag}(1, 1, 2^n) + n \underbrace{\text{Bdiag}(1, 1, 2^{n-1})}_{=B} \end{aligned}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

EXERCICE 8. — Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)A(\varphi)$, puis en déduire $(A(\theta))^n$ pour tout entier naturel n .

En utilisant les formules d'addition pour le cos et le sin, on vérifie que : $A(\theta)A(\varphi) = A(\theta + \varphi)$.

Par une récurrence immédiate, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, (A(\theta))^n = A(n\theta)$

EXERCICE 9. — On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer B^n puis C^n pour tout entier naturel n .

Par une récurrence immédiate, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B^n = 3^{n-1}B$ (et $B^0 = I_3$).

Par ailleurs, on a : $C = 2I_3 + B$.

Puisque les matrices $2I_3$ et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer C^n .

Soit n un entier naturel non nul, on a :

$$C^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = 2^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1} B = 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} B$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, C^n = 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} B$ (et $C^0 = I_3$).

EXERCICE 10. — (Racines carrées de la matrice nulle).

Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = 0_{M_2(\mathbb{C})}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. On a : $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$.

Par suite :

$$M^2 = 0_{M_2(\mathbb{C})} \iff \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2 + bc = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ a^2 = d^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d = \pm a \end{cases}$$

Premier cas — $b = 0$. Alors $a = 0$ (L1), $d = 0$ (L4). Il n'y a aucune condition sur c .

On en déduit que les matrices : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ (avec $c \in \mathbb{C}$) ont un carré égal à $0_{M_2(\mathbb{C})}$.

Deuxième cas — $b \neq 0$. Alors $a+d = 0$ (L2). D'où : $M^2 = 0_{M_2(\mathbb{C})} \iff \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ d = -a \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a^2/b \\ d = -a \end{cases}$

On en déduit que les matrices : $\begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}$ (avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$) ont un carré égal à $0_{M_2(\mathbb{C})}$.

Conclusion. Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$. On a :

$$[M^2 = 0_{M_2(\mathbb{C})}] \iff \left[\left(\exists c \in \mathbb{C}, M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ ou } \left(\exists (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix} \right) \right]$$

Remarque. Ceci signifie en particulier que l'équation $X^2 = 0_{M_2(\mathbb{C})}$ admet dans $M_2(\mathbb{C})$ une infinité de solutions.

EXERCICE 11. — (Racines carrées de la matrice identité).

Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = I_2$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. On a : $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$.

Par suite :

$$M^2 = I_2 \iff \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2 + bc = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d = \pm a \end{cases}$$

Premier cas — $b = 0$. Alors : $M^2 = I_2 \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ c(a+d) = 0 \\ d = \pm 1 \end{cases}$

Premier sous-cas — $c = 0$. Alors : $M^2 = I_2 \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ d = \pm 1 \end{cases}$

On en déduit que : $M = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ (quatre matrices solutions).

Deuxième sous-cas — $c \neq 0$. Alors : $M^2 = I_2 \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ d = \mp 1 \end{cases}$

On en déduit que : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ (avec $c \in \mathbb{C}$), ou $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ (avec $c \in \mathbb{C}$).

Deuxième cas — $b \neq 0$. Alors : $M^2 = I_2 \iff \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ d = -a \end{cases} \iff \begin{cases} c = (1 - a^2) / b \\ d = -a \end{cases}$

On en déduit que : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ (1 - a^2) / b & -a \end{pmatrix}$ (avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$).

Conclusion. L'ensemble des matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = I_2$ est :

$$\{I_2, -I_2, \text{diag}(1, -1), \text{diag}(-1, 1)\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ (1 - a^2) / b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \right\}$$

Remarque. Ceci signifie en particulier que l'équation $X^2 = I_2$ admet dans $M_2(\mathbb{C})$ une infinité de solutions...

EXERCICE 12. — (Racines carrées d'une matrice).

Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. La réponse change-t-elle si l'on considère $M \in M_2(\mathbb{C})$?

A venir !

MATRICES INVERSIBLES

EXERCICE 13. — Lorsque c'est possible, calculer l'inverse de la matrice A dans chacun des cas suivants :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\det A = 1 \neq 0$. Donc $A \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\det A = 0$. Donc $A \notin \text{GL}_2(\mathbb{K})$.

3/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

On a : $\det A = -2 \neq 0$. Donc $A \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

4/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

On a : $\det A = 0$. Donc $A \notin \text{GL}_2(\mathbb{K})$.

$$5/ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a : $\det A = 0$. Donc $A \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

$$6/ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a : $\det A = -1 \neq 0$. Donc $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = A$.

EXERCICE 14. — Calculer l'inverse (lorsque c'est possible) de la matrice A dans chacun des cas suivants :

$$1/ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K}) \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2/ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ (A possède deux lignes égales)

$$3/ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ (A possède deux lignes égales)

$$4/ \ A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$$

(avec t réel quelconque)

On a : $\det A = 1 \neq 0$.[†] Donc $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(-t) & \mathrm{sh}(-t) \\ \mathrm{sh}(-t) & \mathrm{ch}(-t) \end{pmatrix}$.

$$5/ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K}) \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

†. Selon la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique : $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$.

$$6/ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K}) \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 25 & -45 & 60 \\ 7 & 7 & -28 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$7/ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$A \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ (la dernière colonne de A est la somme des deux premières).

$$8/ A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K}) \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$9/ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{K}) \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 15. — On considère la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} (*en utilisant la méthode “AX=B”*).

$$A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Une autre méthode pour le calcul de A^{-1} .

a) Calculer A^2 , et vérifier que $A^2 = -I_4$.

RAS.

b) Déduire de la question précédente que A est inversible, et préciser A^{-1} .

D'après la question précédente, on a : $A^4 = I_4$.

Conclusion. A est inversible, et $A^{-1} = A^3$.

EXERCICE 16. — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer $(A + I)^3$.

On obtient : $A + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis $(A + I)^3 = 0_{M_3(\mathbb{K})}$.

2/ Déduire de la question précédente que A est inversible et calculer son inverse.

Les matrices A et I commutent. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$(A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$$

On en déduit, avec la question précédente, que :

$$A^3 + 3A^2 + 3A + I = 0_{M_3(\mathbb{K})} \iff A^3 + 3A^2 + 3A = -I \iff A \times (-A^2 - 3A - 3I) = I$$

Conclusion. A est inversible, et $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I$.

EXERCICE 17. — Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^4 + 2A^2 + 5A - I_n = 0$. Montrer que A est inversible, et exprimer son inverse en fonction de A .

D'après l'énoncé :

$$A^4 + 2A^2 + 5A = I_n \iff A(A^3 + 2A + 5I_n) = I_n$$

Conclusion. A est inversible, et $A^{-1} = A^3 + 2A + 5I_n$.

EXERCICE 18. — On considère la matrice $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

1/ Calculer $M^2(a, b)$.

2/ Montrer qu'il existe deux réels α et β tels $M^2(a, b) = \alpha I_3 + \beta M(a, b)$.

3/ Déduire de la question précédente à quelle(s) condition(s) sur les réels a et b la matrice $M(a, b)$ est inversible. Et lorsque c'est possible, expliciter alors $(M(a, b))^{-1}$.

EXERCICE 19. — Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Pour n entier naturel non-nul, calculer $(M + I_3)^n$.

On a :

$$(M + I_3)^0 = I_3 ; (M + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; (M + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} ; (M + I_3)^3 = 0_{M_3(\mathbb{K})}$$

On déduit du dernier calcul que $(M + I_3)^n = 0_{M_3(\mathbb{K})}$ pour tout entier naturel $n \geq 3$.

- 2) Déduire de la question précédente que M est inversible, et expliciter son inverse.

D'après la question précédente :

$$M^3 + 3M^2 + 3M + I = 0_{M_3(\mathbb{K})} \iff M^3 + 3M^2 + 3M = -I \iff M \times (-M^2 - 3M - 3I) = I$$

Conclusion. M est inversible, et $M^{-1} = -M^2 - 3M - 3I$.

- 3) Déterminer M^n pour tout entier naturel n .

A voir plus tard, dans le chapitre sur les polynômes.

MATRICES SEMBLABLES (“ $B = P^{-1}AP$ ”)

EXERCICE 20. — On considère les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer P^{-1} .
- 2) Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
- 3) Déterminer A^n pour tout entier naturel n .

EXERCICE 21. — (**CB1, partie spécifique aux PCSI**). Dans cette partie, on cherche à déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) satisfaisant la relation (\star) suivante

$$(\star) \quad u_0 = 3, \quad u_1 = 5, \quad u_2 = 8 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

On suppose que la suite (u_n) vérifie la relation (\star) . On pose pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ que l'on explicitera telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$.
- 2) Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$. Que vaut X_0 ?
- 3) On pose $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
- 4) Soit $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nP^{-1}$.
- 6) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Indication : vous avez montré précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0 = PT^n P^{-1} X_0$. Commencez par calculer $P^{-1}X_0$, puis multipliez à gauche par T^n , puis multipliez à gauche par P ...

EXERCICE 22. — On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 9 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
- 2) Calculer $D = P^{-1}AP$, et vérifier que D est diagonale.
- 3) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$.
- 4) **Etude du commutant de A .** Dans cette question, on cherche à déterminer le commutant de la matrice A , c'est l'ensemble noté $\text{COM}(A)$ des matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
 - a) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ quelconque. On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que : $[AM = MA] \iff [ND = DN]$.
 - b) Déterminer $\text{COM}(D)$. En déduire $\text{COM}(A)$.

MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

EXERCICE 23. — Dans chacun des cas suivants, écrire M sous la forme $S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique.

$$1) M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & \operatorname{ch}(t) \\ \operatorname{sh}(t) & -\operatorname{sh}(t) \end{pmatrix} \quad 3) M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 24. — (**Généralisation – Matrices symétriques et antisymétriques dans $M_n(\mathbb{R})$.**)
Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

- 1/ Ecrire la forme générale d'une matrice symétrique dans $M_n(\mathbb{R})$, puis celle d'une matrice antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$.
- 2/ A l'aide de ce qui précède, montrer que toute matrice symétrique (*resp.* antisymétrique) peut s'écrire comme combinaison linéaire de s_n (*resp.* a_n) matrices. Exprimer s_n et a_n en fonction de n .

DIVERS

EXERCICE 25. — (**Calcul matriciel et Python – Résolution de systèmes 2×2**). Ecrire un programme chargé de faire pour vous la résolution d'un système linéaire de la forme : $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = b_1 \\ cx_1 + dx_2 = b_2 \end{cases}$
Concrètement, le programme devra demander à l'utilisateur les valeurs de a , b , c , d , b_1 et b_2 et renvoyer un message du genre "Pas d'unicité de la solution" lorsque c'est le cas, et renvoyer l'unique couple solution sinon.

EXERCICE 26. — Soit A une matrice **nilpotente** de $M_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire telle que $A^m = 0$ pour un certain entier naturel m .

- 1) Montrer que $I_n - A$ est inversible, et expliciter son inverse.

$$2) \text{En déduire l'inverse de la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 27. — Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que : $M \times {}^t M \times M = I_3$.

Montrer que M est inversible. Puis montrer que M est symétrique.

EXERCICE 28. — Soit n un entier ≥ 2 , et soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, avec $\omega \neq 1$.

On définit une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ en posant $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$.

- 1/ Calculer $A\bar{A}$ (où \bar{A} désigne la matrice conjuguée de \mathbb{C} , définie en posant : $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$).
- 2/ En déduire que A est inversible, et expliciter A^{-1} .

EXERCICE 29. — Etablir qu'il existe exactement 125 matrices M de $M_4(\mathbb{C})$, que l'on précisera, telles que :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 30. — Dans $M_9(\mathbb{K})$, on considère l'ensemble F des matrices dont les sommes des coefficients de chaque colonne sont égales.

Montrer qu'il existe 73 matrices de $M_9(\mathbb{K})$ telle que toute matrice de F est combinaison linéaire de celles-ci.