Exercices 13 – Calcul matriciel

Produits et puissances de matrices

Exercice 1. — Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. — Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer toutes les matrices B de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

2) Déterminer toutes les matrices C de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

Exercice 3. — **(Commutant d'une matrice)**. Déterminer le **commutant** de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (a et b réels distincts), c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$.

Exercice 4. — **(Commutant d'une matrice diagonale dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$)**. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ qui **commutent** avec A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$.*

Exercice 5. — **(Commutant d'une matrice diagonale, cas général)**. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n réels distincts, et D la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Déterminer les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec D.

Exercice 6. — **(Commutant d'une matrice, encore)**. Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{COM}(A)$ le commutant de la matrice A, que l'on ne présente plus. Montrer que $(\mathrm{COM}(A), +)$ est un groupe.

Exercice 7. — Dans chacun des cas suivants, calculer A^n pour tout entier naturel n.

1/ $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2/ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

3/ $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

4/ $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 8. — Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)A(\varphi)$, puis en déduire $(A(\theta))^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 9. — On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer B^n puis C^n pour tout entier naturel n.

Exercice 10. — **(Racines carrées de la matrice nulle)**.
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$.

Exercice 11. — **(Racines carrées de la matrice identité)**.
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = I_2$.

Exercice 12. — **(Racines carrées d'une matrice)**.
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. La réponse change t-elle si l'on considère $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$?

*. L'ensemble de ces matrices est appelé le commutant de la matrice A.

Matrices inversibles

Exercice 13. — Lorsque c'est possible, calculer l'inverse de la matrice A dans chacun des cas suivants :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

4/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

5/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6/ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 14. — Calculer l'inverse (lorsque c'est possible) de la matrice A dans chacun des cas suivants :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4/ $A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}\,(t) \\ \mathrm{sh}\,(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$
(avec t réel quelconque)

5/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

7/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

8/ $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

9/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 15. — On considère la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} *(en utilisant la méthode "AX=B")*.

2) Une autre méthode pour le calcul de A^{-1}.

   a) Calculer A^2, et vérifier que $A^2 = -I_4$.

   b) Déduire de la question précédente que A est inversible, et préciser A^{-1}.

Exercice 16. — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer $(A+I)^3$.

2/ Déduire de la question précédente que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17. — Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^4 + 2A^2 + 5A - I_n = 0$. Montrer que A est inversible, et exprimer son inverse en fonction de A.

Exercice 18. — On considère la matrice $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

1/ Calculer $M^2(a,b)$.

2/ Montrer qu'il existe deux réels α et β tels $M^2(a,b) = \alpha I_3 + \beta M(a,b)$.

3/ Déduire de la question précédente à quelle(s) condition(s) sur les réels a et b la matrice $M(a,b)$ est inversible. Et lorsque c'est possible, expliciter alors $(M(a,b))^{-1}$.

Exercice 19. — Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Pour n entier naturel non-nul, calculer $(M + I_3)^n$.
2) Déduire de la question précédente que M est inversible, et expliciter son inverse.
3) Déterminer M^n pour tout entier naturel n.

Matrices semblables (“$B = P^{-1}AP$”)

Exercice 20. — On considère les matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer P^{-1}.
2) Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
3) Déterminer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 21. — **(CB1, partie spécifique aux PCSI)**. Dans cette partie, on cherche à déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) satisfaisant la relation $(\star)$ suivante

$$(\star) \qquad u_0 = 3,\ u_1 = 5,\ u_2 = 8 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

On suppose que la suite (u_n) vérifie la relation $(\star)$. On pose pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on explicitera telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
2) Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$. Que vaut X_0 ?
3) On pose $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
4) Soit $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$.
6) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   Indication : vous avez montré précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0 = PT^nP^{-1}X_0$. Commencez par calculer $P^{-1}X_0$, puis multipliez à gauche par T^n, puis multipliez à gauche par P...

Exercice 22. — On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 9 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2) Calculer $D = P^{-1}AP$, et vérifier que D est diagonale.
3) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
4) **Etude du commutant de** A. Dans cette question, on cherche à déterminer le commutant de la matrice A, càd l'ensemble noté $\mathrm{COM}(A)$ des matrices $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   a) Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque. On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que : $[AM = MA] \Longleftrightarrow [ND = DN]$.
   b) Déterminer $\mathrm{COM}(D)$. En déduire $\mathrm{COM}(A)$.

Matrices symétriques et antisymétriques

Exercice 23. — Dans chacun des cas suivants, écrire M sous la forme $S+A$ avec S symétrique et A antisymétrique.

$$1)\ M=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}\qquad 2)\ M=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(t)&\mathrm{ch}(t)\\\mathrm{sh}\ (t)&-\mathrm{sh}\ (t)\end{pmatrix}\qquad 3)\ M=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-4&2&0\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$

Exercice 24. — **(Généralisation – Matrices symétriques et antisymétriques dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$).** Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1/ Ecrire la forme générale d'une matrice symétrique dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, puis celle d'une matrice antisymétrique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

2/ A l'aide de ce qui précède, montrer que toute matrice symétrique (*resp.* antisymétrique) peut s'écrire comme combinaison linéaire de s_n (*resp.* a_n) matrices. Exprimer s_n et a_n en fonction de n.

Divers

Exercice 25. — (**Calcul matriciel et Python – Résolution de systèmes** 2×2). Ecrire un programme chargé de faire pour vous la résolution d'un système linéaire de la forme : $\left\{\begin{array}{rcl}ax_1+bx_2&=&b_1\\cx_1+dx_2&=&b_2\end{array}\right.$

Concrètement, le programme devra demander à l'utilisateur les valeurs de a, b, c, d, b_1 et b_2 et renvoyer un message du genre “Pas d'unicité de la solution” lorsque c'est le cas, et renvoyer l'unique couple solution sinon.

Exercice 26. — Soit A une matrice **nilpotente** de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire telle que $A^m=0$ pour un certain entier naturel m.

1) Montrer que I_n-A est inversible, et expliciter son inverse.

2) En déduire l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Exercice 27. — Soit $M\in\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M\times{}^tM\times M=\mathrm{I}_3$.
Montrer que M est inversible. Puis montrer que M est symétrique.

Exercice 28. — Soit n un entier $\geqslant 2$, et soit $\omega\in\mathbb{U}_n$, avec $\omega\neq 1$.
On définit une matrice $A=(a_{ij})\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $a_{ij}=\omega^{(i-1)(j-1)}$.

1) Calculer $A\bar{A}$ (où $\bar{A}$ désigne la matrice conjuguée de $\mathbb{C}$, définie en posant : $\bar{A}=(\overline{a_{ij}})$).

2) En déduire que A est inversible, et expliciter A^{-1}.

Exercice 29. — Etablir qu'il existe exactement 125 matrices M de $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$, que l'on précisera, telles que :

$$M^5=\begin{pmatrix}32&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Exercice 30. — Dans $\mathrm{M}_9(\mathbb{K})$, on considère l'ensemble F des matrices dont les sommes des coefficients de chaque colonne sont égales.
Montrer qu'il existe 73 matrices de $\mathrm{M}_9(\mathbb{K})$ telle que toute matrice de F est combinaison linéaire de celles-ci.