

Chapitre 13 : Calcul matriciel

NB : n et p désignent deux entiers naturels non nuls ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1 – Généralités sur les matrices

Définition de **matrice à n lignes et p colonnes** à coefficients dans \mathbb{K} . L'ensemble de ces matrices est noté $M_{np}(\mathbb{K})$. Une matrice $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ sera notée $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$. Deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Exemples et cas particuliers : la **matrice nulle** de $M_{np}(\mathbb{K})$ est celle dont tous les coefficients sont nuls ; pour éviter les confusions, elle est notée $0_{M_{np}(\mathbb{K})}$. Une **matrice colonne** (*resp.* **ligne**) est un élément de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ (*resp.* $M_{1,p}(\mathbb{K})$).

2 – Opérations sur les matrices

➤ Somme de deux matrices de $M_{np}(\mathbb{K})$. Propriétés de la somme : pour A, B et C quelconques dans $M_{np}(\mathbb{K})$:

$$1) A + B = B + A; 2) A + 0_{M_{np}(\mathbb{K})} = A; 3) A + (B + C) = (A + B) + C$$

Remarque : $0_{M_{np}(\mathbb{K})}$ est l'**élément neutre** pour la somme dans $M_{np}(\mathbb{K})$.

➤ Multiplication par un scalaire dans $M_{np}(\mathbb{K})$. Propriétés : pour A et B dans $M_{np}(\mathbb{K})$, pour λ et μ quelconques dans \mathbb{K} :

$$1) 1A = A; 2) (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A; 3) \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A; 4) \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

Pour tout $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, la matrice opposée notée $(-A)$ est la matrice $(-1)A$. Sans surprise : $A + (-A) = 0_{M_{np}(\mathbb{K})}$.

Propriété : $(M_{np}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.

➤ Produit matriciel. **Définition** : le **produit** de deux matrices $A \times B$ est défini si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Explicitement :

$$\forall A \in M_{np}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{pm}(\mathbb{K}), \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; m \rrbracket,$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

La matrice AB hérite du nombre de lignes de A et du nombre de colonnes de B . Son coefficient situé à la i -ème ligne et à la j -ème colonne est le “produit” de la i -ème ligne de A et de la j -ème colonne de B .

Remarques : le produit matriciel n'est pas commutatif (pire : le produit AB peut être défini sans que le produit BA le soit). En outre, on peut avoir $AB = 0_{M_{np}(\mathbb{K})}$ sans que A ou B soit nulle (encore pire : on peut avoir $AB = 0$ mais $BA \neq 0$).

Propriétés du produit : sous réserve que les produits suivants soient définis, on a : 1) Associativité : $A(BC) = (AB)C$ 2) Distributivité par rapport à la somme : $A(B + C) = AB + AC$

➤ Transposée d'une matrice $M_{np}(\mathbb{K})$. Définition et propriétés (linéarité, transposée d'un produit).

3 – Matrices carrées

Définition : une matrice est **carrée** lorsqu'elle a autant de lignes que de colonnes (“ $n = p$ ”). L'espace des matrices carrées à n lignes et n colonnes (de taille n) à coefficients dans \mathbb{K} est noté $M_n(\mathbb{K})$ (plutôt que $M_{n,n}(\mathbb{K})$).

Définition : la matrice **identité** de $M_n(\mathbb{K})$, notée I_n est la matrice n'ayant que des 1 sur sa diagonale, des 0 partout ailleurs. Plus précisément :

$$\forall (i, j) \in (\llbracket 1; n \rrbracket)^2, (I_n)_{ij} = 1 \text{ si } i = j, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Notation : $\forall (i, j) \in (\llbracket 1; n \rrbracket)^2, (I_n)_{ij} = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker)

Propriété : $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), AI_n = I_n A = A$. En particulier, la matrice I_n et plus généralement la matrice λI_n ($\lambda \in \mathbb{K}$) commutent avec toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$.

Propriété : $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau (non commutatif et non intègre pour $n \geq 2$).

Définitions de matrice **diagonale**, **triangulaire supérieure**, **triangulaire inférieure**.

Notations : $D_n(K)$, $T_n^+(\mathbb{K})$ et $T_n^-(\mathbb{K})$ désignent les ensembles des matrices diagonales, triangulaires supérieures et triangulaires inférieures de $M_n(\mathbb{K})$ respectivement.

Propriété : $(D_n(\mathbb{K}), +, \times)$, $(T_n^+(\mathbb{K}), +, \times)$ et $(T_n^-(\mathbb{K}), +, \times)$ sont des sous-anneaux de $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$. En outre, l'anneau $(D_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est commutatif ; et pour $n \geq 2$, aucun de ces anneaux n'est intègre.

4 – Puissances d'une matrice carrée

Formule du binôme de Newton dans $M_n(\mathbb{K})$. Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$, telles que $AB = BA$, et soit $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(A + B)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^{N-k} B^k$$

Application pratique importante : calcul des puissances d'une matrice A se décomposant comme : $A = \lambda I_n + N$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et N matrice nilpotente.

5 – Matrices inversibles

Généralités, cas particulier des matrices inversibles dans $M_2(\mathbb{K})$, matrices inversibles et systèmes linéaires.

QUESTIONS DE COURS

- Connaître des exemples de matrices A et B de $M_2(\mathbb{R})$ illustrant les situations suivantes :
 - $AB \neq BA$
 - $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$
 - $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ avec A et B diagonales
 - $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$, mais $A^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$
- **Propriété** : la matrice identité I_n est l'élément neutre pour le produit matriciel. *On montrera ici que : $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $A \times I_n = A$ et on pourra admettre $I_n \times A = A$.*

- **Propriété (linéarité de la trace)** : $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$
- **Théorème** : toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- **Propriété** : $S_N(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.
- **Propriété** : le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale, et plus précisément :

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n)$$
- **Propriété** : Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$. On a : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.