Limites et continuité — Propriété de limite séquentielle

Propriété de limite séquentielle — Soient $(x_n)_n$ une suite réelle convergeant vers a (avec a réel, ou $a = \pm\infty$), et f une fonction définie au voisinage de a. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (avec ℓ réel, ou $\ell = \pm\infty$). Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

Preuve (dans les 9 cas).

➢ $\boxed{\textbf{Cas 1} : \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \text{ et } \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \text{ (avec } a \text{ et } \ell \text{ réels)}}$.

Fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, on peut affirmer que : $\exists\, \alpha > 0,\ |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ (♠).

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |x_n - a| < \alpha$ (♣).

D'après (♠) et (♣), et puisque ε est un réel strictement positif arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |f(x_n) - \ell| < \varepsilon, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell}$$

➢ $\boxed{\textbf{Cas 2} : \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \text{ (avec } \ell \text{ réel)}}$.

Fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ (♠).

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n > x_0$ (♣).

D'après (♠) et (♣), et puisque ε est un réel strictement positif arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |f(x_n) - \ell| < \varepsilon, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell}$$

➢ $\boxed{\textbf{Cas 3} : \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \text{ (avec } \ell \text{ réel)}}$.

Fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ (♠).

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n < x_0$ (♣).

D'après (♠) et (♣), et puisque ε est un réel strictement positif arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |f(x_n) - \ell| < \varepsilon, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell}$$

➢ $\boxed{\textbf{Cas 4} : \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \text{ et } \lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ (avec } a \text{ réel)}}$.

Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, \alpha > 0,\ |x - a| < \alpha \implies f(x) > M$ (♠).

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |x_n - a| < \alpha$ (♣).

D'après (♠) et (♣), et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies f(x_n) > M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty}$$

➢ $\boxed{\textbf{Cas 5} : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \implies f(x) > M$ $(\spadesuit)$.

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n > x_0$ $(\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies f(x_n) > M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty}$$

➢ $\boxed{\textbf{Cas 6} : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x < x_0 \implies f(x) > M$ $(\spadesuit)$.

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n < x_0$ $(\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies f(x_n) > M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty}$$

➢ $\boxed{\textbf{Cas 7} : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \text{ et } \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \text{ (avec } a \text{ réel)}}$.

Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, \alpha > 0,\ |x-a| < \alpha \implies f(x) < M$ $(\spadesuit)$.

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |x_n - a| < \alpha$ $(\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies f(x_n) < M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty}$$

➢ $\boxed{\textbf{Cas 8} : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \implies f(x) < M$ $(\spadesuit)$.

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n > x_0$ $(\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies f(x_n) < M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty}$$

➢ $\boxed{\textbf{Cas 9} : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x < x_0 \implies f(x) < M$ $(\spadesuit)$.

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n < x_0$ $(\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies f(x_n) < M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty}$$

<u>**Conclusion**</u> : dans tous les cas on a montré que : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ (avec ℓ réel, ou $\ell = \pm\infty$).