TVI ET ALGORITHME DE DICHOTOMIE

Théorème des valeurs intermédiaires — Soient a et b deux réels avec $a < b$, et f une fonction définie sur $[a, b]$ telle que :

(H1) f est continue sur $[a, b]$;

(H2) $f(a) f(b) \leqslant 0$;

Alors : $\exists\, c \in [a; b]\,, \quad f(c) = 0$.

La preuve du TVI repose sur l'algorithme de dichotomie, dont voici une illustration et une brève présentation.

L'hypothèse $f(a) f(b) \leqslant 0$ signifie que les réels $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés. Deux cas peuvent se présenter : $(f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0)$ ou $(f(a) \geqslant 0$ et $f(b) \leqslant 0)$.

Sans nuire à la généralité, on peut supposer $(f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0)$; dans l'autre cas, il suffira de remplacer f par $(-f)$.

$$\boxed{\text{Supposons } f(a) \leqslant 0 \text{ et } f(b) \geqslant 0}.$$

L'idée est alors de construire deux suites (a_n) et (b_n) satisfaisant les conditions :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$;
- $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;
- $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

par récurrence comme indiqué ci-dessous.

➤ Initialisation : $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

➤ Hérédité : on suppose construits les réels a_0, a_1,. . ., a_n, b_0, b_1,. . ., b_n satisfaisant les conditions de la preuve. On veut construire a_{n+1} et b_{n+1} vérifiant les conditions au rang supérieur.

Pour cela, on "coupe l'intervalle $[a_n, b_n]$ en deux, et on regarde ce qui se passe au milieu". Plus sérieusement et précisément :

On pose : $m = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

Si $f(m) \leqslant 0$ alors

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

Sinon *

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Dans les deux cas, les réels a_{n+1} et b_{n+1} vérifient les trois conditions :

i) $f(a_{n+1}) \leqslant 0$ et $f(b_{n+1}) \geqslant 0$;

ii) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

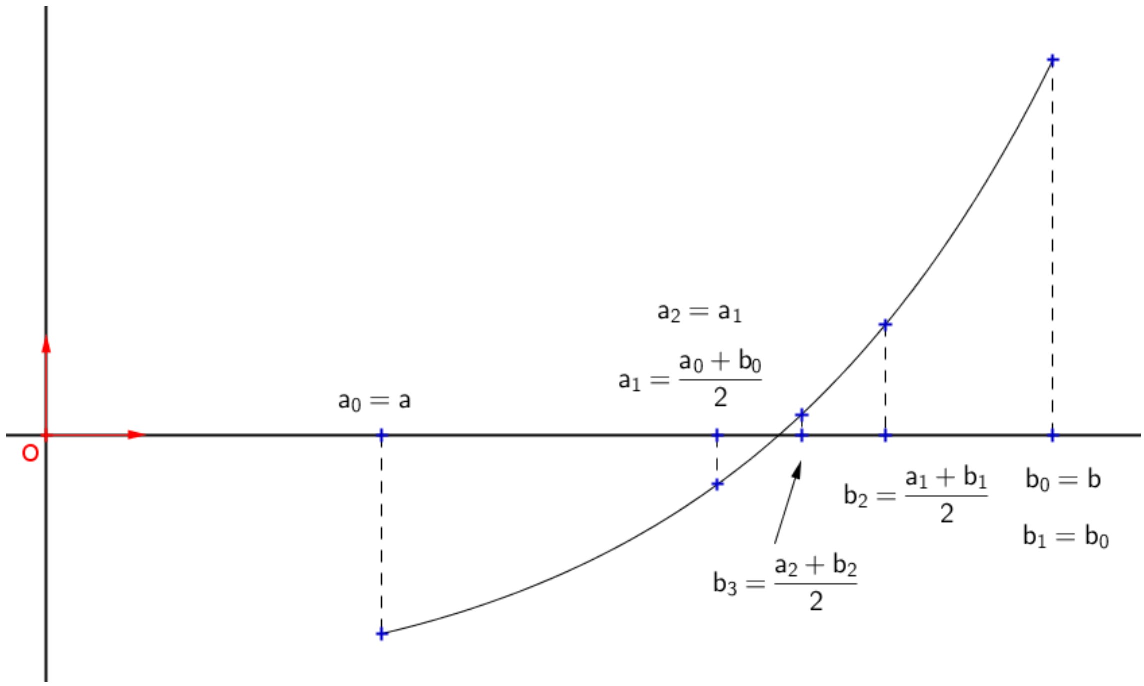
iii) $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$

Il ne "reste plus qu'à" établir que les suites (a_n) et (b_n) ont une limite commune, et que celle-ci est solution de l'équation $f(x) = 0$.

*. C'est-à-dire si $f(m) > 0$.

Illustrations de la méthode de dichotomie

Dans le cas où $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$



Dans le cas où $f(a) \geqslant 0$ et $f(b) \leqslant 0$