Colle 15 – Questions de cours

Remarque. *En cours, on a affirmé "vite fait" que les propriétés usuelles concernant les limites de fonctions se déduisaient aisément des propriétés analogues sur les limites de suites. Les trois premières questions de cours illustrent cette affirmation, en donnant les preuves dans le cadre des fonctions des théorèmes de comparaison, de la limite monotone, et des gendarmes.*

Question de cours 1. — **Théorème de comparaison**. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de $+\infty$. On suppose que :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) \geqslant g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

Alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Preuve. On se place dans les hypothèses de l'énoncé. Soit M un réel. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$:

$$\exists\, x_0 \in I,\ \forall\, x \in I,\ x \geqslant x_0 \Longrightarrow g(x) \geqslant M \qquad (\spadesuit)$$

Or selon l'énoncé : $\forall\, x \in I, \quad f(x) \geqslant g(x) \qquad (\clubsuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $\forall\, x \in I,\ x \geqslant x_0 \Longrightarrow f(x) \geqslant M$

En résumé, on a établi que : $\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, x_0 \in I,\ \forall\, x \in I,\ x \geqslant x_0 \Longrightarrow f(x) \geqslant M$

Ce qui signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et achève la preuve.

Question de cours 2. — **Théorème *(de la limite monotone)*** : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est croissante et majorée (ou décroissante et minorée) alors : $\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Preuve. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$,* croissante et majorée : $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$.

Notons $E = \{f(x)\,,\, x \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des valeurs de la fonction f. L'ensemble E est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (par définition) et majorée (par hypothèse). D'après la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, E admet une borne supérieure : notons $S = \sup E$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de borne supérieure, il existe un réel x_0 tel que : $S - \varepsilon < f(x_0) \leqslant S$.

La fonction f étant croissante (par hypothèse) et majorée par S, on en déduit que :

$\forall\, x \geqslant x_0,\ S - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant S$, d'où : $\forall\, x \geqslant x_0,\ S - \varepsilon < f(x) \leqslant S$ ce qui implique : $\forall\, x \geqslant x_0,\ |f(x) - S| < \varepsilon$

En résumé, on a prouvé que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ (x \geqslant x_0 \Longrightarrow |f(x) - S| < \varepsilon)$. Donc la fonction f a pour limite S en $+\infty$.

Conclusion. Si f est croissante et majorée, alors f admet une limite finie en $+\infty$.

Dans l'autre situation (celle où f est décroissante et minorée), il suffit d'observer que la fonction $(-f)$ est croissante et majorée pour se ramener au cas précédent, et conclure en observant que $(-f)$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si il en va de même pour f.

Question de cours 3. — **Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)**. Soit ℓ un réel, et soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage I de $+\infty$. On suppose que :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell = \lim_{x\to+\infty} h(x)$$

Alors :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$$

Preuve. On se place dans les hypothèses de l'énoncé. Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ par hypothèse : $\exists\, x_0 \in I, \forall\, x \in I,\ x \geqslant x_0 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \qquad (\spadesuit)$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ par hypothèse : $\exists\, x_1 \in I, \forall\, x \in I,\ x \geqslant x_1 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon \qquad (\clubsuit)$

Enfin, par hypothèse : $\forall\, x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \qquad (\heartsuit)$

Posons $x_2 = \max(x_0, x_1)$. On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ que : $\forall\, x \in I,\ x \geqslant x_2 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon$

On a ainsi établi que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_2 \in I, \forall\, x \in I,\ x \geqslant x_2 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$

Ce qui signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, et achève la preuve.

---

*. Il suffit en fait de supposer que f est définie au voisinage de $+\infty$.

Question de cours 4. — **Propriété *(de limite séquentielle)*** : soient $(x_n)_n$ une suite réelle de limite $+\infty$, et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$). Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

Preuve. *A noter qu'il y a ici deux preuves à effectuer, suivant que $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$.*

➤ Cas n^{0}1 : $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (avec ℓ réel). Fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ (♠).

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n > x_0$ (♣).

D'après (♠) et (♣), et puisque ε est un réel strictement positif arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |f(x_n) - \ell| < \varepsilon, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell}$$

➤ Cas n^{0}2 : $\ell = +\infty$. On suppose donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \implies f(x) > M$ (♠).

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n > x_0$ (♣).

D'après (♠) et (♣), et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies f(x_n) > M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty}$$

Question de cours 5. — **Propriété** : la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

Preuve. Commençons par observer que la fonction sinus étant bornée sur $\mathbb{R}$, elle ne peut pas avoir de limite infinie en $+\infty$.

Montrons qu'elle n'a pas de limite finie en $+\infty$. A cette fin, on raisonne par l'absurde et on suppose que :

$$\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty} \sin(x) = \ell \qquad (♠)$$

Considèrons les suites (x_n) et (y_n) définies en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad x_n = 2n\pi \quad \text{et} \quad y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

Il est immédiat que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. De ce fait, de l'hypothèse (♠) et de la propriété de limite séquentielle on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(x_n) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sin(y_n) = \ell$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sin(x_n) = 0$ et $\sin(y_n) = 1$.

Il s'ensuit que $\ell = 0$ et $\ell = 1$: c'est absurde !

On peut donc conclure que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Soient $\lambda_1,\ldots,\, \lambda_n$ n scalaires distincts. Le commutant de $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2. — Montrer que deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ semblables ont même trace. Puis donner un exemple de matrices ayant même trace, qui ne sont pas semblables.

Exercice 3. — Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}$. Calculer : $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$.

Exercice 4. — Soient p et q deux réels strictement positifs, et $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0;1]$ tel que : $pf(0) + qf(1) = (p+q)\, f(x_0)$.

Exercice 5. — Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Exercice 6. — Soient $f_1,\ldots,\, f_4$ les fonctions définies sur $]-1,1[$ en posant :

$$f_1(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}\ ;\ f_2(x) = \frac{\sin(x)}{x}\ ;\ f_3(x) = \frac{\arcsin(x)}{x}\ ;\ f_4(x) = \frac{\tan(x)}{x}$$

Etablir que :

$$\forall\, k \in [\![\, 1, 4\,]\!], \quad \lim_{x\to 0} f_k(x) = 1$$

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Soient $\lambda_1,\ldots,\ \lambda_n$ n scalaires distincts. Le commutant de $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{M}_n\,(\mathbb{K})$.

Soient $\lambda_1,\ldots,\ \lambda_n$ n scalaires distincts. Notons $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Une matrice $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est dans le commutant de D si et seulement si $MD = DM$.

Or : $MD = DM \Longleftrightarrow \forall\ (i,j) \in [\![\, 1, n\,]\!]^2,\ (MD)_{ij} = (DM)_{ij}$

$\Longleftrightarrow \forall\ (i,j) \in [\![\, 1, n\,]\!]^2,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ik}d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}m_{kj}$

$\Longleftrightarrow \forall\ (i,j) \in [\![\, 1, n\,]\!]^2,\ m_{ij}d_{jj} = d_{ii}m_{ij}$

$\Longleftrightarrow \forall\ (i,j) \in [\![\, 1, n\,]\!]^2,\ m_{ij}\lambda_j = \lambda_i m_{ij}$

$\Longleftrightarrow \forall\ (i,j) \in [\![\, 1, n\,]\!]^2,\ (\lambda_j - \lambda_i)\, m_{ij} = 0$

D'où, puisque l'on a supposé les λ_i distincts : $\forall\ (i,j) \in [\![\, 1, n\,]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow m_{ij} = 0$

On en déduit que les matrices M commutant avec D sont exactement celles dont tous les coefficients situés en dehors de la diagonale $(i \neq j)$ sont nuls ; en d'autres termes, ce sont exactement les matrices diagonales de $\mathrm{M}_n\,(\mathbb{K})$.

Conclusion. Le commutant de D est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{M}_n\,(\mathbb{K})$

Exercice 2. — Montrer que deux matrices de $\mathrm{M}_n\,(\mathbb{K})$ semblables ont même trace. Puis donner un exemple de matrices ayant même trace, qui ne sont pas semblables.

Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n\,(\mathbb{K})$ semblables :

$$\exists\, P \in \mathrm{GL}_n\,(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$$

On a :

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{tr}\left(\left(P^{-1}A\right)\times P\right) = \mathrm{tr}\left(P\times\left(P^{-1}A\right)\right) = \mathrm{tr}\left(PP^{-1}A\right) = \mathrm{tr}(A)$$

Finalement : [A et B semblables] $\Longrightarrow \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

L'implication réciproque est fausse : dans $\mathrm{M}_2\,(\mathbb{R})$, les matrices $0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ et E_{12} ont même trace, mais ne sont pas semblables (la matrice nulle n'étant semblable qu'à elle-même).

Exercice 3. — Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f\,(t) = \dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}$. Calculer : $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t)$.

Pour tout réel t, on a : $\mathrm{e}^t = 1 + t + t\varepsilon(t)$ avec $\displaystyle\lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.

Il s'ensuit que pour tout réel $t \neq 0$, on a :

$$f\,(t) = \frac{t^2}{t + t\varepsilon(t)} = \frac{t}{1+\varepsilon(t)}$$

Par suite : $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t) = 0$

Exercice 4. — Soient p et q deux réels strictement positifs, et $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0;1]$ tel que : $pf\,(0) + qf\,(1) = (p+q)\,f\,(x_0)$.

Pour tout réel $x \in [0,1]$, posons : $g(x) = pf\,(0) + qf\,(1) - (p+q)\,f\,(x)$.

La fonction g est continue sur $[0,1]$ (H+TG).

En outre :

$$g(0) = q\,(f\,(1) - f\,(0)) \qquad \text{et} \qquad g(1) = p\,(f\,(0) - f\,(1)) = -p\,(f\,(1) - f\,(0))$$

Il s'ensuit que : $g(0)g(1) = -pq\,(f\,(1) - f\,(0))^2$.

En résumé :

$$g \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g(0)g(1) \leqslant 0$$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists\, x_0 \in [0,1],\ g(x_0) = 0$.

Conclusion. Il existe un réel $x_0 \in [0;1]$ tel que : $pf(0) + qf(1) = (p+q)\, f(x_0)$.

Exercice 5. — Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

- La fonction $x \longmapsto x^2$ tend vers 0 en 0, et la fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ est bornée. Il s'ensuit que : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right) = 0$.
- Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{avec : } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$$

Ainsi, pour x suffisamment grand on a :

$$x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{x^3}\right) = 0$, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right) = 0$.

Exercice 6. — Soient $f_1, \ldots, f_4$ les fonctions définies sur $]-1,1[$ en posant :

$$f_1(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}\ ;\ f_2(x) = \frac{\sin(x)}{x}\ ;\ f_3(x) = \frac{\arcsin(x)}{x}\ ;\ f_4(x) = \frac{\tan(x)}{x}\ ;$$

Etablir que :

$$\forall\, k \in [\![\, 1, 4 \,]\!], \quad \lim_{x\to 0} f_k(x) = 1$$

Selon le formulaire des DL1 en 0 usuels, on a pour tout réel x dans $]-1,1[$:

$$\ln(1+x) = x + x\varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\sin(x) = x + x\varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

$$\arcsin(x) = x + x\varepsilon_3(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$$

$$\tan(x) = x + x\varepsilon_4(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$$

Il s'ensuit que :

$$\forall\, k \in [\![\, 1, 4 \,]\!],\ f_k(x) = \frac{x + x\varepsilon_k(x)}{x} = 1 + \varepsilon_k(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_k(x) = 0$$

Par suite : $\forall\, k \in [\![\, 1, 4 \,]\!],\ \lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = 1$