Exercices 14 – Limites et Continuité

Exercice 1. — Déterminer si les limites des fonctions suivantes existent en a :

1) $x \longmapsto x \ln x$ (en $a = 0$)
2) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (en $a = 0$)
3) $x \longmapsto x^2 \sin\left(1/x^3\right)$ (en $a = 0$)
4) $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{-1/x}$ (en $a = 0$)
5) $x \longmapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ (en $a = 0$)
6) $x \longmapsto \dfrac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}$ en ($a = 0$ et $a = +\infty$)
7) $x \longmapsto \dfrac{t}{\sin(\alpha t)}$ (en $a = 0$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$)
8) $x \longmapsto x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ (en $a = 0$ et $a = +\infty$)

Exercice 2. — Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}$. Comment choisir $f(0)$ pour que f soit continue en 0 ?

Exercice 3. — Même question avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$.

Exercice 4. — Même question avec la fonction f définie sur $]-\pi/2;\pi/2[\, \setminus \{0\}$ par $f(t) = \dfrac{\tan t}{\sqrt{|t|}}$.

Exercice 5. — Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution unique dans $[0;+\infty[$.

Exercice 6. — Montrer que l'équation (E) : $x - \mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\alpha \in [1/2;1]$.

Exercice 7. — Pour tout entier naturel non-nul n, on note (E_n) l'équation : $\tan x = nx$.

1) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n dans $]0;\pi/2[$.
2) Que peut-on dire de la suite (x_n) ?

Exercice 8. — Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

1) Etablir que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Puis établir que si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

2) **A partir de maintenant, on suppose** $f(0) = 1$.

   1) Etablir que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

   2) Etablir que pour tout entier naturel n non nul, on a : $f(n) = [f(1)]^n$, et $f(-n) = \dfrac{1}{f(n)}$.

   3) Etablir que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{x \ln(f(1))}$.

Exercice 9. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f admet une limite finie en 0, et que pour tout réel x on a : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Prouver que f est constante.

Exercice 10. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

La fonction f n'est autre que la fonction indicatrice des rationnels notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

Montrer que f n'admet de limite en aucun réel.

Exercice 11. — Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si la fonction f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^2(x) = f(x)$$

alors f est identiquement nulle ou bien f est constante égale à 1.

Exercice 12. — Montrer que les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 13. — Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ une fonction continue. On suppose que f est k-lipschitzienne * avec $k \in \,]0;1[$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 14. — Soient p et q deux réels strictement positifs, et $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0;1]$ tel que : $pf(0) + qf(1) = (p+q)\,f(x_0)$.

Exercice 15. — Soient f et g deux fonctions continues définies sur $[a;b]$ (avec a, $b \in \mathbb{R}$). On suppose que : $\forall\, x \in [a;b]\,,\ f(x) < g(x)$.
Montrer qu'il existe un réel c strictement positif tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + c < g(x)$.

Exercice 16. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1) Calculer $f(0)$.

2) Montrer que pour tout réel x on a : $f(-x) = -f(x)$.

3) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(nx) = nf(x)$.

4) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a : $f(r) = rf(1)$.

5) Conclure que pour tout réel x on a : $f(x) = xf(1)$.

Exercice 17. — Montrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. — Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement continue et bornée. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Suites récurrentes (“$u_{n+1} = f(u_n)$”)

Exercice 19. — Etudier la suite (en particulier, on déterminera l'éventuelle limite) u définie en posant :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$$

Exercice 20. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \geqslant -2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

Exercice 21. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.

Exercice 22. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Exercice 23. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \geqslant 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.

*. C'est-à-dire : $\forall\ (x,y) \in [0;1] \times [0;1]\,,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k \times |x - y|$.