Objectif Prépa — Exercices

Factorielle d'un entier naturel

Exercice 1. — Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

1/ $A = \dfrac{4!}{2!}$

2/ $B = \dfrac{5! \times 4!}{3! \times 6!}$

3/ $C = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

4/ $D = \dfrac{(n+1) \times n!}{(n+2)!}$

5/ $E = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

6/ $F = \dfrac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2}$

Exercice 2. — Montrer par récurrence sur n la propriété suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Exercice 3. — **(Suite de Wallis)**.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n$.

Etablir que : $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

Exercice 4. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{2}{3}$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}\, u_n$$

1/ Calculer les valeurs de u_1 et u_2.

2/ Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2^{2n+3}\,(n+2)!\; n!}{(2n+4)!}$$

Sommes (généralités & exemples)

Exercice 5. — Etablir par récurrence sur N que :*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

Exercice 6. — Soit N un entier naturel. Calculer les sommes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{N} n, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{N} k \qquad \text{et} \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{N} N.$$

Exercice 7. — Soit $q \in \mathbb{R}$, tel que $q \neq 1$. Etablir par récurrence sur n que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

---

*. Càd, moins rigoureusement mais plus explicitement : $1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}$

Exercice 8. — Soit $q \in \mathbb{R}$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^{2k}$.

Exercice 9. — Etablir par récurrence sur N que :[†]

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Exercice 10. — Etablir par récurrence sur N que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

Sommes téléscopiques

Exercice 11. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.[‡]

Exercice 12. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.[§]

Exercice 13. — $\star$ Soit n un entier naturel non nul. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

Exercice 14. — $\star$ Soit n un entier naturel non nul. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k \times k!)$

Exercice 15. — $\star$ Soit n un entier naturel non nul. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Exercice 16. — Etablir que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

En déduire que pour tout entier naturel N non nul on a : $1 \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$.

Suites adjacentes

Exercice 17. — On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1/ Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante, et que $(v_n)_n$ est croissante.

2/ Calculer $u_n - v_n$ pour tout entier naturel n. Conclure.

---

†. Càd, moins rigoureusement mais plus explicitement : $1^2 + 2^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

‡. On pourra déterminer deux réels a et b tels que : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

§. On pourra déterminer trois réels a, b et c tels que : $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.

Exercice 18. — On pose pour tout entier naturel non nul n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $U_n = S_n + \frac{1}{n \times n!}$

1/ Montrer que (S_n) et (U_n) sont monotones, de monotonies opposées.

2/ En déduire que (S_n) et (U_n) convergent vers une limite commune, que nous noterons ℓ.

Intégrales et primitives usuelles

Exercice 19. — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto x^4$

2) $f : x \longmapsto 2x + 3$

3) $f : x \longmapsto 6x^2 - 4x + 7$

4) $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$

5) $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

6) $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$

7) $f : x \longmapsto 3\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{4x}$

8) $f : x \longmapsto \sin(2x) + \cos(3x)$

Exercice 20. — Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$

2) $I_2 = \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$

3) $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x-4} \, \mathrm{d}x$

4) $I_4 = \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$

5) $I_5 = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

6) $I_6 = \int_0^1 (1-x)^n \, \mathrm{d}x$

Intégration par parties

Exercice 21. — A l'aide d'une (ou plusieurs) IPP, calculer chacune des intégrales suivantes.

1/ $\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

2/ $\int_{-\pi}^{\pi} (1-x)\cos(x)\mathrm{d}x$

3/ $\int_0^1 \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$

4/ $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 22. — On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x \, dx$$

A l'aide d'une IPP, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!}$$