Objectif Prépa — Exercices — Eléments de correction

Factorielle d'un entier naturel

Exercice 1. — Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

1/ $A = \dfrac{4!}{2!}$

2/ $B = \dfrac{5! \times 4!}{3! \times 6!}$

3/ $C = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

4/ $D = \dfrac{(n+1) \times n!}{(n+2)!}$

5/ $E = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

6/ $F = \dfrac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2}$

1/ $A = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{2! \times 3 \times 4}{2!} = 12$

2/ $B = \dfrac{5! \times 4!}{3! \times 6!} = \dfrac{5! \times 3! \times 4}{3! \times 5! \times 6} = \dfrac{2}{3}$

3/ $C = \dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{n! \times (n+1)}{n!} = n+1$

4/ $D = \dfrac{(n+1) \times n!}{(n+2)!} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)! \times (n+2)} = \dfrac{1}{n+2}$

5/ $E = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n-1)! \times n \times (n+1) \times (n+2)}{(n-1)!} = n(n+1)(n+2)$

6/ $F = \dfrac{n! \times (n+1) \times (n-1)!}{n \times (n-1)! \times n!} = \dfrac{n+1}{n}$

Exercice 2. — Montrer par récurrence sur n la propriété suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$.

➤ **Initialisation** $(n = 0)$. D'une part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k! = 0! = 1$. D'autre part : $(0+1)! = 1$. L'assertion $P(0)$ est donc vraie.

➤ **Hérédité**. Supposons que l'assertion $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n.

Alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k! = \sum_{k=0}^{n} k! + (n+1)! \leqslant_{HR} (n+1)! + (n+1)! = 2(n+1)! \leqslant (n+2)!$.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k! \leqslant (n+2)!$.

Cette inégalité signifiant que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, on a établi l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Exercice 3. — (Suite de Wallis).

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n$.

Etablir que : $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

On souhaite établir que la propriété $P(n)$: $\quad u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\quad$ est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : pour $n = 0$, on a d'une part $u_0 = 1$ et d'autre part $\dfrac{(0)!}{2^0\,(0!)^2} = 1$. La propriété est initialisée.

Hérédité : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n, et montrons que $P(n+1)$ l'est.

On a : $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} u_{2n} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} = \dfrac{2n+2}{2n+2}\dfrac{2n+1}{2n+2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} = \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\,((n+1)!)^2}$

Ce qui signifie que $P\,(n+1)$ est vraie, établit l'hérédité de la propriété, et achève donc cette récurrence.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}$

Exercice 4. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{2}{3}$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}\, u_n$$

1/ Calculer les valeurs de u_1 et u_2.

D'après l'énoncé, on a : $u_1 = \dfrac{2}{5}\, u_0 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{3}$. D'où : $\boxed{u_1 = \dfrac{4}{15}}$.

De même, on a : $u_2 = \dfrac{4}{7}\, u_1 = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{4}{15}$. D'où : $\boxed{u_2 = \dfrac{16}{105}}$.

2/ Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2^{2n+3}\,(n+2)!\; n!}{(2n+4)!}$$

Notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = \dfrac{2^{2n+3}\,(n+2)!\; n!}{(2n+4)!}$.

➤ **Initialisation** $(n = 0)$. D'après l'énoncé : $u_0 = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{2^{2\times 0+3}\,(0+2)!\; 0!}{(2\times 0+4)!} = \dfrac{8\times 2}{4!} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$. L'assertion $P(0)$ est donc vraie.

➤ **Hérédité**. Supposons que l'assertion $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n.

D'après l'énoncé on a : $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}\, u_n$.

On en déduit, par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} \times \dfrac{2^{2n+3}\,(n+2)!\;n!}{(2n+4)!}$.

On écrit alors judicieusement :

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} \times \frac{2^{2n+3}\,(n+2)!\;n!}{(2n+4)!} \times \frac{2n+6}{2n+6}$$

On en déduit que : $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)2^{2n+3}\,(n+2)!\;n!2(n+3)}{(2n+5)(2n+4)!(2n+6)}$ soit : $u_{n+1} = \dfrac{2^{2n+5}\,(n+3)!\;(n+1)!}{(2n+6)!}$

Cette dernière égalité signifiant que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, on a établi l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^{2n+3}\,(n+2)!\;n!}{(2n+4)!}$

Sommes (généralités & exemples)

Exercice 5. — Etablir par récurrence sur n que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Etablissons la propriété par récurrence sur l'entier naturel n. Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

L'initialisation (le fait que $P(0)$ est vraie) est immédiate.

Passons à l'hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + n + 1 = \frac{n\,(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

La première égalité ci-dessus provient de la relation de Chasles pour les sommes, et la seconde de l'hypothèse de récurrence. Au final, on a établi que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$. Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie, et prouve l'hérédité.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

Exercice 6. — Soit N un entier naturel. Calculer les sommes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{N} n, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{N} k \qquad \text{et} \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{N} N.$$

*. Càd, moins rigoureusement mais plus explicitement : $1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}\,; \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}\,; \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{N} N = N^2$$

Exercice 7. — Soit $q \in \mathbb{R}$, tel que $q \neq 1$. Etablir par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Soit q un réel $\neq 1$. On peut procéder par récurrence sur n ; pour changer un peu, on utilise ici une méthode alternative.

Soit n un entier naturel quelconque. Posons : $S = \sum_{k=0}^{n} q^k$. On a :

$$(1-q)\,S = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n}\left(q^k - q^{k+1}\right) = q^0 - q^{n+1} \qquad \text{d'où : } (1-q)\,S = 1 - q^{n+1}$$

Puisque $q \neq 1$, on en déduit que : $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exercice 8. — Soit $q \in \mathbb{R}$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^{2k}$.

On a : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{2k} = \sum_{k=1}^{n}\left(q^2\right)^k$. S est la somme des termes d'une suite géométrique de raison q^2. On distingue donc deux cas suivant que la raison q^2 est égale à 1 ou non.
Explicitement :

$$\forall q \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{k=1}^{n} q^{2k} = \begin{cases} q^2 \times \dfrac{1-q^{2n}}{1-q^2} & \text{si } q \neq \pm 1 \\[2ex] n & \text{si } q = \pm 1 \end{cases}$$

Exercice 9. — Etablir par récurrence sur n que : †

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$, et prouvons que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n par récurrence sur n.

†. Càd, moins rigoureusement mais plus explicitement : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

➤ Initialisation ($n = 0$). D'une part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$. D'autre part : $\dfrac{0\,(0+1)\,(2\times 0+1)}{6} = 0\ldots$ Donc $P(0)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\,[n\,(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)\,(2n^2+7n+6)}{6} \quad (\spadesuit)$$

Par ailleurs : $\dfrac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6} = \dfrac{(n+1)\,(2n^2+7n+6)}{6}$ $(\clubsuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6}$. Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

EXERCICE 10. — Etablir par récurrence sur N que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

Etablissons la propriété par récurrence sur l'entier naturel non nul N. Pour tout entier naturel non nul N, notons $P(N)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$.

L'initialisation (le fait que $P(1)$ est vraie) est immédiate.

Passons à l'hérédité. Supposons $P(N)$ vraie pour un certain entier naturel non nul N. On a alors :

$$\sum_{n=1}^{N+1} n^3 = \left(\sum_{n=1}^{N} n^3\right) + (N+1)^3 = \frac{N^2\,(N+1)^2}{4} + (N+1)^3 = \frac{N^2\,(N+1)^2}{4} + \frac{4\,(N+1)^3}{4}$$

$$\frac{(N+1)^2\,(N^2+4N+4)}{4} = \frac{(N+1)^2\,(N+2)^2}{4}$$

On a ainsi établi que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N+1} n^3 = \frac{(N+1)^2\,(N+2)^2}{4}$. Ce qui assure que $P(N+1)$ est vraie, et prouve l'hérédité.

Conclusion. $\forall\, N \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N} n^3 = \frac{N^2\,(N+1)^2}{4}$.

SOMMES TÉLÉSCOPIQUES

Exercice 11. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. ‡

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

Exercice 12. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. §

On a :

$$a = c = \frac{1}{2} \text{ et } b = -1$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$$

L'astuce consiste à observer que $2 = 1 + 1\dots$ On peut ainsi réécrire la somme précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)\right]$$

Conclusion. $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right]$

Exercice 13. — ⋆ Soit n un entier naturel non nul. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1/2}{k} - \dfrac{1/2}{k+2}$.

D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$.

Problème : la somme obtenue n'est alors pas télescopique, et on ne sait donc pas la calculer écrite sous cette forme. On la réécrit donc de la manière diabolique suivante :

‡. On pourra déterminer deux réels a et b tels que : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

§. On pourra déterminer trois réels a, b et c tels que : $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right]$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right]$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right]$

Exercice 14. — $\star$ Soit n un entier naturel non nul. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k \times k!)$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} (k \times k!) = \sum_{k=0}^{n} ((k+1-1) \times k!) = \sum_{k=0}^{n} [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1$$

Ayant reconnu une somme télescopique, on peut conclure : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k \times k!) = (n+1)! - 1$

Exercice 15. — $\star$ Soit n un entier naturel non nul. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

Ayant reconnu une somme télescopique, on peut conclure : $S = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$

Exercice 16. — Etablir que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

En déduire que pour tout entier naturel N non nul on a : $1 \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$.

A VENIR !!!

Suites adjacentes

Exercice 17. — On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1/ Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante, et que $(v_n)_n$ est croissante.

A VENIR!!!

2/ Calculer $u_n - v_n$ pour tout entier naturel n. Conclure.

A VENIR!!!

Exercice 18. — On pose pour tout entier naturel non nul n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $U_n = S_n + \dfrac{1}{n \times n!}$

1/ Montrer que (S_n) et (U_n) sont monotones, de monotonies opposées.

A VENIR!!!

2/ En déduire que (S_n) et (U_n) convergent vers une limite commune, que nous noterons ℓ.

Intégrales et primitives usuelles

Exercice 19. — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto x^4$
2) $f : x \longmapsto 2x + 3$
3) $f : x \longmapsto 6x^2 - 4x + 7$
4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$
5) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
6) $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$
7) $f : x \longmapsto 3\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{4x}$
8) $f : x \longmapsto \sin(2x) + \cos(3x)$

A VENIR!!!

Exercice 20. — Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$
2) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$
3) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x$
4) $I_4 = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
5) $I_5 = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
6) $I_6 = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x$

A VENIR!!!

Intégration par parties

Exercice 21. — A l'aide d'une (ou plusieurs) IPP, calculer chacune des intégrales suivantes.

1/ $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

A VENIR !!!

2/ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1-x)\cos(x)\mathrm{d}x$

A VENIR !!!

3/ $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

A VENIR !!!

4/ $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x$

A VENIR !!!

Exercice 22. — On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\, dx$$

A l'aide d'une IPP, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!}$$

A VENIR !!!