Objectif Prépa 2026 - Mathématiques

Problématique et objectifs.

Depuis l'Antiquité, les découvertes mathématiques ont été guidées par des considérations "élémentaires" : résoudre des équations, et calculer des sommes.

Pour ne parler que du second problème, mentionnons que le calcul d'une somme **finie** (càd ne comportant qu'un nombre fini de termes) est aisé, à condition que le nombre de termes de cette somme ne soit pas trop grand... A titre d'illustration simpliste, le calcul de la somme S_1 demandera certainement beaucoup moins de temps que celui de la somme S_2 ci-dessous :

$$S_1 = 1 + 4 + 9 \qquad\qquad S_2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 2026^3$$

Néanmoins, avec *beaucoup* de patience, ou avec une formule que l'on établit en début de Sup, la somme S_2 peut être calculée exactement.

Le problème se complique lorsque l'on étudie les sommes **infinies** : avant même se demander comment les calculer, il convient en premier lieu de les définir, et de savoir par exemple quel sens donner à l'écriture

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

Ceci se fera par le biais des suites, dont certaines vous sont déjà familières.

Une fois cette notion de "somme infinie" précisée, on se propose d'étudier la suite (S_n), dont le terme général est défini par :

$$S_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Explicitement, on souhaite établir que cette suite est convergente, et calculer sa limite.

Pour y parvenir, je vous propose un joli petit voyage mathématique. Ce voyage nous fera parcourir des contrées nouvelles, sans être complètement inaccessibles (en tout cas, je ferai tout pour qu'elles ne le soient pas !) : l'étude de quelques sommes particulières, de quelques suites, et la présentation de la notion d'intégrale d'une fonction. Toutes ces notions seront étudiées en 1ère année de prépa (MPSI ou PCSI).

Une fois établi le résultat principal concernant S_n, on pourra (en fonction du temps dont nous disposerons) élargir le problème initial, et étudier quelques développements sur ce thème, théoriques (en montrant que e est irrationnel) et/ou plus pratiques (écrire un programme en Python pour obtenir une valeur approchée de e).

`stephane.zahnd@ac-lille.fr`

Table des matières

Bienvenue en Objectif Prépa 2026 !

SCAN ME

Chapitre 1

Révisions... ou pas !

1.1 Factorielle d'un entier naturel

Définition 1 - (Factorielle d'un entier naturel). Pour tout entier naturel n, on appelle **factorielle** de n et on note $n!$ l'entier naturel défini en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k \qquad \text{et} \qquad 0! = 1$$

Exemples : $0! = 1$; $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $7! = 5040$

Propriété 1 - 1/ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n+1! = (n+1) \times n!$

2/ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n! = n \times (n-1)!$

3/ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ n! = n \times (n-1) \times (n-2)!$

1.2 Sommes et symbole $\sum$ (sigma)

Notation 1 - (Somme — Symbole sigma).

Soit (u_n) une suite réelle, et soit N un entier naturel quelconque. On note :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \quad \text{la somme} \quad u_0 + u_1 + \cdots + u_N.$$

Remarques et exemples.

1/ Dans la somme, le nom de l'indice n'a aucune influence sur la valeur de la somme. Plus explicitement :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{i=0}^{N} u_i = \sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{p=0}^{N} u_p = \sum_{\Psi=0}^{N} u_\Psi = \cdots$$

2/ Les bornes de la somme ne sont pas forcément 0 et N. Par exemple :

$$\sum_{n=2}^{N+1} u_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_{N+1}\,; \qquad \sum_{n=1}^{2N} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{2N}$$

3/ Exemple 1 : somme des entiers.

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + \cdots + N$$

4/ Exemple 2 : somme des carrés des entiers.

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + N^2$$

5/ Exemple 3 : une somme géométrique.

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^N \qquad (q \text{ réel quelconque})$$

6/ Exemple 4 : une autre somme.

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

Les exemples 1 à 3 ci-dessus sont des exemples de sommes classiques, donc on connaît les expressions, comme l'affirme la propriété suivante.

Propriété 2 - (Quelques sommes classiques).

Soit n un entier naturel. On a :

1/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (càd : $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$).

2/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (càd : $0 + 1 + 4 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

3/ Pour tout réel $q \neq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Remarque. La dernière formule peut être généralisée. Pour tout couple d'entiers (p, n) avec $p \leqslant n$, et toujours avec un réel $q \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$$

Exemples.

1/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} k = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

2/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 5 \times 11 \times 7 = 385$

3/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)$

1.3 Sommes télescopiques

Définition 2 - On appelle **somme télescopique** une somme s'écrivant :

$$\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k)$$

Propriété 3 - (Calcul d'une somme télescopique). Soient (u_n) une suite réelle, p et n deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. On a :

$$\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

Exemples.

1/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \left(\mathrm{e}^{k+1} - \mathrm{e}^k\right) = \mathrm{e}^{11} - \mathrm{e}^0$

2/ $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(N+1)$

3/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Calculons $V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

On a : $V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)\,(k+1)}{k^2}\right)$

$$= \sum_{k=2}^{n} [\ln(k-1) - \ln(k)] + \sum_{k=2}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] = (\ln(1) - \ln(n)) + (\ln(n+1) - \ln(2)) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$.

Conséquence. On peut déduire de ce qui précède que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln(1/2)}$.

Plus tard en Sup, nous traduirons cette propriété en disant que la *série de terme général* $\ln\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$ *est convergente, et a pour somme* $\ln(1/2)$.

Chapitre 2

Calcul intégral

2.1 Primitives d'une fonction continue

Définition 3 - Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. Une primitive de F sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque. Très très informellement, calculer une primitive, c'est "dériver à l'envers" !

Exemples.

1/ La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de la fonction $f : x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$.

2/ La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

3/ La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de la fonction $f : x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

4/ La fonction ln est une primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

5/ La fonction $(-\cos)$ est une primitive de la fonction sin sur $\mathbb{R}$.

Ces exemples donnés, on peut observer que l'on n'a pas unicité des primitives pour une fonction donnée, comme le précise l'énoncé suivant.

Propriété 4 - Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

En d'autres termes, si F et G sont deux primitives de f sur I, alors :

$$\exists\, K \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I,\ \ F(x) = G(x) + K.$$

Conséquence. Dès que l'on a déterminé une primitive de f, on dispose d'une infinité de primitives de f (en rajoutant une constante quelconque). Par exemple :

$$\text{la fonction } f : x \longmapsto \frac{x^2}{2} \text{ est une primitive de la fonction } f : x \longmapsto x \text{ sur } \mathbb{R}$$

donc :

$$\text{la fonction } f : x \longmapsto \frac{x^2}{2} + c \text{ (c réel quelconque) est une primitive de la fonction } f : x \longmapsto x \text{ sur } \mathbb{R}$$

Pour finir ces généralités, on cite un énoncé qui assure que toute fonction “assez gentille” (càd continue) sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Théorème 1 - (Théorème fondamental de l'Analyse).
Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I (donc une infinité de primitives sur I).

La preuve de ce théorème est assez technique, et demande quelques connaissances relatives au cours de 1ère année (MPSI ou PCSI).

2.2 Primitives usuelles

A titre d'exemples, voici quelques primitives (de référence) de certaines fonctions usuelles.

Fonction f	Primitives F
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
e^x	$\mathrm{e}^x + c$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} \mathrm{e}^{ax+b} + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$

Fonction f	Primitives F
$u'(x)\, u(x)$	$\frac{1}{2} u^2(x) + c$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + c$
$u'(x)\, u^n(x)$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}(x) + c$
$u'(x)\, \mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)} + c$
$u'(x) \sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$
$u'(x) \cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$

2.3 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition 4 - Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

L'**intégrale de f sur** $[a,b]$ est le réel :

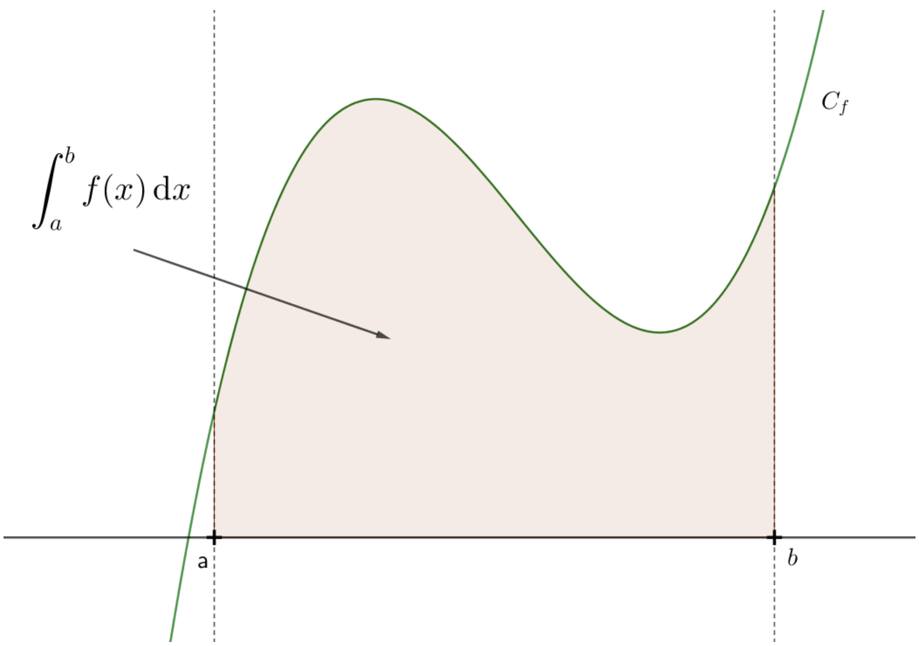
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

où F désigne une primitive de f sur $[a,b]$.

En notant $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, la relation précédente peut encore s'écrire : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$.

Remarque. On peut observer que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est (heureusement !) indépendante de la primitive F de f choisie pour la calculer. En effet, si F et G désignent deux primitives de f, il existe une constante K telle que $F = G + K$. Dans ces conditions, on a clairement : $[F(x)]_a^b = [G(x)]_a^b$.

Interprétation géométrique de l'intégrale. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Exemples.

1/ On a : $\displaystyle\int_0^3 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{2}$

2/ On a : $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

3/ On a : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$

4/ On a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$

Propriété 5 - (Propriétés de l'intégrale). Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.

1/ $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \displaystyle\int_a^b (\lambda f+\mu g)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ **(linéarité)**

2/ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ **(relation de Chasles)**

3/ $[f \text{ positive sur } [a,b]] \Longrightarrow \left[\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0\right]$ **(positivité)**

Pour la suite des évènements, on a également besoin de la propriété ci-dessous.

Propriété 6 - (Croissance de l'intégrale). Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On a :

$$[f \leqslant g \quad \text{sur } [a,b]] \Longrightarrow \left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

2.4 Formule d'intégration par parties

Terminologie. Soit u une fonction définie sur un intervalle I. On dit que u est **de classe** $\mathscr{C}^1$ sur I lorsque u est dérivable sur I, et que sa dérivée u' est continue sur I.[1]

Théorème 2 - (Formule d'intégration par parties) Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, et soient a et b deux réels dans I. On a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple. Soit : $I = \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Posons pour tout réel t : $u(t)=t$ et $v(t)=-\mathrm{e}^{-t}$.

D'après les théorèmes généraux, les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel t on a : $u'(t)=1$ et $v'(t)=\mathrm{e}^{-t}$.

On peut légitimement utiliser une intégration par parties pour obtenir :

$$I = \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-1} - \left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 \qquad \text{soit : } \boxed{I = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}}.$$

1. La plupart des fonctions usuelles (au moins exp, ln, les fonctions polynomiales, cos et sin) sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leurs ensembles de définitions respectifs.

Chapitre 3

Application : calcul de $\lim_{n\to+\infty} S_n$

3.1 Une famille d'intégrales $(I_n)_n$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x \, dx$$

On définit ainsi une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 7 - Avec les notations introduites ci-dessus :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

Cet énoncé repose essentiellement sur la propriété de croissance de l'intégrale.

3.2 Relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}

Propriété 8 - Avec les notations introduites ci-dessus :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!}$$

On établit cet énoncé à l'aide de la formule d'intégration par parties.

3.3 Conclusion

A l'aide des deux propriétés précédentes, et de la formule permettant de calculer une somme télescopique, on obtient le résultat suivant.

Propriété 9 - Avec les notations introduites précédemment :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \mathrm{e}$$

En d'autres termes : $\boxed{\mathrm{e} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$

Chapitre 4

Et après ?...

4.1 Calculs de sommes en langage Python

4.2 Irrationnalité de e

4.3 D'autres "sommes infinies"

4.3.1 Limite de la somme des $1/k$

Propriété 10 - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$

4.3.2 Limite de la somme des $(-1)^k/(k+1)$

Propriété 11 - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln(2)$

4.3.3 Limite de la somme des $1/k^2$

Propriété 12 - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$