Colle 16 – Questions de cours

Question de cours 1. — **Propriété *(de limite séquentielle)*** : soient $(x_n)_n$ une suite réelle de limite $+\infty$, et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$). Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

Preuve. A noter qu'il y a ici deux preuves à effectuer, suivant que $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$.

➤ <u>Cas n^{0}1 : $\ell \in \mathbb{R}$</u>. On suppose donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (avec ℓ réel). Fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ($\spadesuit$).

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n > x_0$ ($\clubsuit$).

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$), et puisque ε est un réel strictement positif arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |f(x_n) - \ell| < \varepsilon, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell}$$

➤ <u>Cas n^{0}2 : $\ell = +\infty$</u>. On suppose donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \implies f(x) > M$ ($\spadesuit$).

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n > x_0$ ($\clubsuit$).

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$), et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies f(x_n) > M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty}$$

Question de cours 2. — **Propriété**. Soit u une suite réelle telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante, alors u est monotone. Si f est décroissante, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées.

Preuve. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles, telle que $f(I) \subset I$.

➤ **Si f est croissante**. On distingue deux cas : $u_0 \leqslant u_1$ et $u_0 > u_1$.

Une récurrence immédiate* permet d'établir que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$ dans le premier cas, et $u_{n+1} \geqslant u_n$ dans le second. En tous les cas, la suite u est monotone, ce qui prouve la première implication.

➤ **Si f est décroissante**. Alors $f \circ f$ est croissante. On en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Si $u_0 \geqslant u_2$, alors la suite (u_{2n}) est croissante. On a par ailleurs : $f(u_0) = u_1 \leqslant f(u_2) = u_3$ puisque f est décroissante. On en déduit que la suite (u_{2n+1}) est décroissante. Ainsi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées.

L'autre cas, où $u_0 \leqslant u_2$, se déduit trivialement du raisonnement précédent.

Question de cours 3. — **Exercice classique - *(théorème du point fixe)***.

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0([a,b],[a,b]),\ \exists\, c \in [a,b],\ f(c) = c.$$

Preuve. Par hypothèse, la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ est continue sur $[a,b]$.

Par ailleurs : $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, puisque par hypothèse encore, on a $f(a) \in [a,b]$, d'où en particulier $f(a) \geqslant a$. De manière analogue : $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$.

La fonction g étant continue sur $[a,b]$, et telle que $g(a)g(b) \leqslant 0$, le TVI permet d'affirmer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire tel que $f(c) = c$, ce qu'il fallait démontrer.

---

*. Détaillée dans le cours.

Question de cours 4. — Formule de la moyenne. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$: $\exists\, c \in [a,b],\ f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$.

Preuve. Puisque f est continue sur le segment $[a,b]$, le théorème des bornes atteintes permet d'affirmer que :

$$\exists\ (t,u) \in [a,b]^2,\ \forall\, x \in [a,b],\ f\,(t) \leqslant f(x) \leqslant f(u)$$

Par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(u)\mathrm{d}x$

D'où : $(b-a)\,f(t) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\,f(u)$

Soit encore : $f(t) \leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(u)$

Ce dernier encadrement fait apparaître le terme du milieu comme une valeur intermédiaire de la fonction f sur $[a,b]$. Le théorème du même nom permet d'affirmer que : $\exists\ c \in\ [a;b],\ f\,(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, ce qui prouve la formule.

Question de cours 5. — Théorème (des bornes atteintes) : toute fonction à valeurs réelles continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Preuve. Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$ (avec a et b réels, $a < b$), et à valeurs réelles.

On pose $M = \sup\{f(x)\,/\,x \in\ [a,b]\} \in\ \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) : $\exists\ (x_n) \in\ [a,b]^{\mathbb{N}}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\,(x_n) = M$.

La suite (x_n) étant bornée †, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer que l'on peut en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergente. Notons : $c = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$.

Puisque la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est une suite d'éléments de $[a,b]$, on a : $c \in\ [a,b]$ (par stabilité des inégalités larges par passage à la limite).

Il est alors légitime d'appliquer la propriété de continuité séquentielle à la fonction f, qui est continue en c car elle est en particulier continue sur $[a,b]$, pour obtenir : $f(c) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ (♠).

Il reste à observer que la suite de terme général $f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est extraite de la suite de terme général $f\,(x_n)$ pour affimer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = M$ (♣).

Par unicité de la limite, on déduit de (♠) et de (♣) que : $M = f(c)$. Ainsi la fonction f admet un maximum sur $[a,b]$, égal à $f(c)$.

On établit de façon analogue que f admet un minimum sur $[a,b]$ (prendre l'image de la démonstration précédente par la symétrie par rapport à zéro).

†. C'est une suite de réels de $[a,b]$.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f admet une limite finie en 0, et que pour tout réel x on a : $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$.
Etablir que f est constante.

Exercice 2. — Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^2(x) = f(x)$$
Etablir que f est identiquement nulle ou bien f est constante égale à 1.

Exercice 3. — On suppose que f est une fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et qu'il existe un réel α tel que :
$$\forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$$
Montrer que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$$

Exercice 4. — Montrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. — On définit une suite réelle (u_n) en posant :
$$u_0 \in]2, +\infty[\qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$
Etablir que la suite (u_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente, et préciser sa limite.

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f admet une limite finie en 0, et que pour tout réel x on a : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Etablir que f est constante.

Par hypothèse, f admet une limite finie en 0. Notons : $\ell = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Pour tout réel x : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Par récurrence, pour tout réel x et pour tout entier naturel n : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

Soit x un réel quelconque. On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2^n} = 0$. D'après la propriété de limite séquentielle : $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \ell$.

Puisque par ailleurs la suite de terme général $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ est constante égale à $f(x)$, on a : $f(x) = \ell$.

Le raisonnement précédent étant valide pour un réel x arbitraire, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ell$.

Conclusion. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$. **Conclusion.**

Exercice 2. — Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^2(x) = f(x)$$

Etablir que f est identiquement nulle ou bien f est constante égale à 1.

D'après l'énoncé : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = 1$.

Si f n'est pas constante, alors le TVI assure que la fonction f prend au moins une fois la valeur $1/2$: contradiction.

Il s'ensuit que f est constante égale à 0 ou 1.

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction f est identiquement nulle, ou constante égale à 1.

Exercice 3. — On suppose que f est une fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et qu'il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$$

Soit x un nombre réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\exists\, \rho_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} \rho_n = x$$

On en déduit déjà par opérations usuelles sur les limites que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha\rho_n} = \mathrm{e}^{\alpha x} \qquad (\spadesuit)$$

Par ailleurs, puisque la fonction f est continue en x, la propriété de continuité séquentielle permet d'affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} f(\rho_n) = f(x) \qquad (\clubsuit)$$

Enfin, puisque la suite ρ_n est une suite de rationnels, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(\rho_n) = \mathrm{e}^{\alpha\rho_n}$$

On en déduit, avec $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$

Exercice 4. — Montrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

En notant T la période de f, il suffit de prouver que $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$, puis d'appliquer le théorème des bornes atteintes à la fonction f sur le segment $[0,T]$.

Prouvons l'égalité $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$.

Soit $y \in f(\mathbb{R})$: $\exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.

Notons à présent $k = \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor$. Par définition de partie entière, on a :

$$k \leqslant \frac{x}{T} < k+1 \qquad \text{d'où} \qquad kT \leqslant x < (k+1)T$$

Il s'ensuit que :

$$0 \leqslant x - kT < T$$

En outre, la fonction f étant T-périodique, on a : $f(x-kT) = f(x)$.
Donc : $y = f(x-kT)$, avec $(x-kT) \in [0,T]$. Il s'ensuit que $y \in f([0,T])$.

Ce qui prouve l'inclusion : $f(\mathbb{R}) \subset f([0,T])$. L'inclusion réciproque est immédiate.

En résumé : $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$. La fonction f étant continue sur le segment $[0,T]$, on peut conclure qu'elle est bornée sur $[0,T]$ (th des bornes atteintes), et donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. — On définit une suite réelle (u_n) en posant :

$$u_0 \in]2,+\infty[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

Etablir que la suite (u_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente, et préciser sa limite.

Réponse non détaillée : la suite (u_n) est monotone puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt{2+x}$ est croissante sur son ensemble de définition.

En outre, pour tout réel $x \geqslant 2$, on a : $x \geqslant \sqrt{2+x}$.
En effet, si $x \geqslant 2$, on a :

$$x \geqslant \sqrt{x+2} \Longleftrightarrow x^2 \geqslant x+2 \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x-2)(x+1) \geqslant 0$$

On en déduit en particulier que : $u_0 \geqslant \sqrt{2+u_0}$, soit $u_0 \geqslant u_1$. La suite (u_n) est donc décroissante.

On vérifie par une récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 2$.

On déduit des deux lignes précédentes et du TLM que la suite (u_n) converge. Notons ℓ sa limite.

La fonction f étant continue sur son ensemble de définition, on a : $f(\ell) = \ell$, càd : $\ell = \sqrt{2+\ell}$. On déduit des calculs faits quelques lignes plus haut que $\ell = 2$.

Conclusion. La suite (u_n) est décroissante, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.