Problème de la "semaine" 6
(corrigé en ligne mardi 10/11)

Deus ex machina* — *La petite histoire derrière cet énoncé

Le premier exo est celui auquel vous avez échappé lors du DS d'hier... Il s'agit en effet d'un exo sur les suites "du type $u_{n+1} = f(u_n)$", qui n'étaient opportunément pas au programme de ce devoir. Je vous le soumets à titre d'illustration du cours, et d'entraînement. Dans les sujets de Concours, il est rarissime que l'on étudie une telle suite uniquement muni de connaissances relatives à la continuité ; il est plus fréquent de les étudier avec des connaissances supplémentaires sur les fonctions dérivables, et les DL à un ordre quelconque (c'est tellement plus rapide, et largement plus intéressant). En l'état, cet exo 1 est donc un très joli exercice de Terminale, qui permet de réviser les études de signes, et les études de fonctions (2 compétences basiques toutefois indispensables en prépa !).

Le deuxième exo est inspiré d'un exo posé en colle cette semaine. Il s'agit d'un exercice extrêmement classique, à l'écrit et à l'oral. Il en existe plusieurs variantes et applications, suivant l'anneau dans lequel on l'applique. Je vous encourage très vivement à y jeter un coup d'œil appuyé !

Exercice 1 — **Etude d'une suite** Soient a un réel strictement positif, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}$$

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ Etablir que l'équation $f(x) = x$ admet exactement trois racines réelles, que l'on précisera.

2/ Pour tout réel x, on pose : $g(x) = f(x) - x$. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

3/ Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3\left[h(x)\right]^2}{\left(3x^2 + a\right)^2}$$

où h est une fonction polynomiale que l'on explicitera.

4/ Déterminer le sens de variation de f. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

5/ Dans cette question, on suppose que $u_0 > \sqrt{a}$.

a/ Etablir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > \sqrt{a}$.

b/ Etablir que la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

EXERCICE 2 — TELLEMENT CLASSIQUE

1/ Dans cette question, on considère un anneau $(A, +, \times)$, dont on note $\mathbf{1_A}$ l'élément neutre pour la loi $\times$.

a/ Soit $a \in A$. Etablir, en n'utilisant certainement pas un raisonnement par récurrence, que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{1_A} - a^n = (\mathbf{1_A} - a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

b/ On suppose à présent que a est un élément **niltpotent** de A. Etablir que $(\mathbf{1_A} - a)$ est un élément inversible de A, et préciser son inverse.

2/ **Application**. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

A l'aide de la question 1 (et donc sans résoudre un système), établir que la matrice M est inversible, et calculer son inverse.