MPSI – Colle 16 (2 au 6 février 2026) : Limites & Continuité

Chapitre 14 : Limites & Continuité

1 – Limites d'une fonction à valeurs réelles

Définition de voisinage (ouvert) de a avec $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Pour f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de a, définitions de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ avec a et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Notions de limite à droite et de limite à gauche de $a \in \mathbb{R}$ pour f.

Propriétés des limites : les propriétés démontrées dans le chapitre sur les suites s'étendent pour la plupart aux limites de fonctions. C'est notamment le cas des propriétés algébriques (limite d'une somme, d'un produit...), des théorèmes de comparaison, d'encadrement, de la limite monotone.... Propriété de limite séquentielle.

2 – Continuité d'une fonction à valeurs réelles

Définition de continuité en a pour une fonction f définie au voisinage de a. Définition de continuité sur un intervalle I. Notation $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. Définition de prolongement par continuité.

3 – Propriétés des fonctions (à valeurs réelles) continues

Propriétés générales : $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ est stable par "cocktail"...

Propriété de continuité séquentielle.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Conséquences du TVI : théorème de la bijection, théorème du point fixe.

Théorème des bornes atteintes.

4 – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, définition de f continue en $a \in I$.

Théorème ("pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$") : f est continue en a ssi $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont continues en a.

Exemple-clef : la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$.

Questions de cours

- **Propriété** ***(de limite séquentielle - le retour !)*** : soient $(x_n)_n$ une suite réelle de limite $+\infty$, et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$). Alors : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.
- **Théorème du point fixe** ***(exercice classique)***.
- **Propriété**. Pour une suite "du type $u_{n+1} = f(u_n)$", on a : f croissante $\Longrightarrow (u_n)_n$ monotone. Et f décroissante $\Longrightarrow (u_{2n})$ et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées.
- **Formule de la moyenne**.
- **Théorème des bornes atteintes*** **(sur le principe du volontariat)** : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.