

COLLE 18 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1. — Théorème de Rolle. Si f est dérivable sur $]a; b[$, continue sur $[a, b]$, et $f(a) = f(b)$, alors : $\exists c \in]a; b[$, $f'(c) = 0$.

La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes sur $[a, b]$ (théorème des bornes atteintes). Notons m son minimum et M son maximum.

► Si $m = M$: alors f est constante sur $[a, b]$. Par suite : $\forall c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

► Si $m < M$: distinguons alors deux sous-cas : soit $f(a) = m$, soit $f(a) \neq m$.

➤ Si $f(a) = m$: alors on a aussi $f(b) = m$ (par hypothèse), donc le maximum M de f est atteint en un réel c de $]a, b[$ (puisque $m \neq M$), et on a donc $f'(c) = 0$.

➤ Si $f(a) \neq m$: alors on a aussi $f(b) \neq m$ (par hypothèse), donc le minimum m de f est atteint en un réel c de $]a, b[$, et on a donc $f'(c) = 0$.

Conclusion. Dans tous les cas : $\exists c \in]a; b[$, $f'(c) = 0$.

QUESTION DE COURS 2. — Théorème des accroissements finis. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$, alors : $\exists c \in]a; b[$, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On définit une fonction g sur $[a, b]$ en posant :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

D'après les théorèmes généraux sur la continuité et la dérivabilité respectivement, la fonction g^* est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

En outre $g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a)$ d'où $g(a) = f(a)$; et $g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a)$ d'où : $g(b) = f(a)$.

La fonction g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, dont l'application donne : $\exists c \in]a, b[, g'(c) = 0$.

Or : $\forall x \in]a, b[, g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On en déduit : $\exists c \in]a, b[, f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. D'où finalement : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

QUESTION DE COURS 3. — Propriété. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Si f' est bornée sur I , alors f est lipschitzienne sur I .

Supposons f' bornée sur I . Il existe un réel M tel que : $|f'| \leq M$ sur I .

Soient x et y deux réels distincts dans I . La fonction f étant dérivable sur I , elle est continue sur le segment $[x, y]$ (ou sur le segment $[y, x]$), et dérivable sur l'intervalle $]x, y[$ (ou sur l'intervalle $]y, x[$). On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f entre x et y :

il existe un réel c compris entre x et y tel que : $f(y) - f(x) = f'(c) \times (y - x)$

$\Rightarrow$ il existe un réel c compris entre x et y tel que : $|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \times |y - x|$

$\Rightarrow$ il existe un réel c compris entre x et y tel que : $|f(y) - f(x)| \leq M \times |y - x|$

L'inégalité obtenue ci-dessus restant évidemment valide dans le cas particulier où $x = y$, on peut conclure que :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq M |y - x|$$

Ce qui signifie que f est M -lipschitzienne sur I .

► **Conclusion.** $[f'$ bornée sur $I] \Rightarrow [f$ lipschitzienne sur $I]$

*. Informellement, cette fonction g est destinée à "redresser la situation", en ôtant à f ce qui l'empêche de prendre les mêmes valeurs en a et en b ; la motivation étant de se ramener à la situation du théorème de Rolle.

QUESTION DE COURS 4. — Propriété. Soit $f \in \mathbb{R}^I$, une fonction dérivable sur I :

$$f \text{ est croissante sur } I \implies f' \text{ est positive sur } I$$

Supposons f croissante sur I .

Soit a un réel de l'intervalle I . Puisque f est dérivable sur I , elle l'est en particulier en a , et : $f'(a) = f'_d(a)$. En d'autres termes : $f'(a) = \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Or, pour tout réel $h > 0$: $f(a+h) - f(a) \geq 0$ (puisque f est supposée croissante).

$$\text{Donc : } \forall h > 0, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0.$$

Par stabilité des inégalités larges par passage à la limite, on en déduit que : $\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$, d'où $f'_d(a) \geq 0$ d'où $f'(a) \geq 0$.

Le réel a de I étant arbitraire dans le raisonnement ci-dessus, on peut conclure que : $\forall a \in I, f'(a) \geq 0$. En d'autres termes, f' est positive sur I . On a donc : $\boxed{[f \text{ croissante sur } I] \implies [f' \text{ positive sur } I]}$

QUESTION DE COURS 5. — Propriété. Soit $f \in \mathbb{R}^I$, une fonction dérivable sur I :

$$f' \text{ est positive sur } I \implies f \text{ est croissante sur } I$$

► Réciproquement, supposons f' positive sur I .

Soient a et b deux réels dans I , avec $a < b$. Puisque f est dérivable sur I , on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis[†] sur $[a; b]$ et affirmer que :

$$\exists c \in]a; b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{d'où : } \exists c \in]a; b[, \quad f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$$

Comme $f'(c)$ est positif par hypothèse, et que par ailleurs $b > a$ toujours par hypothèse, on en déduit que $f(b) - f(a) \geq 0$. En résumé, on a établi l'implication : $[b > a] \implies [f(b) \geq f(a)]$. Donc f est croissante sur I .

On a donc : $\boxed{[f' \text{ positive sur } I] \implies [f \text{ croissante sur } I]}$

[†]. Puisqu'en particulier f est dérivable sur $]a, b[$ et continue sur $[a, b]$.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Etablir que la fonction cube est lipschitzienne sur $[0, A]$ pour tout réel $A > 0$.

EXERCICE 2. — Etablir que la fonction cube n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

EXERCICE 3. — Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan(x) \leq x$.

Questions de révision concernant $\arctan$: ensemble de définition ? Parité ? Dérivabilité et dérivée ? Sens de variation ? Limites en $\pm\infty$? DL à l'ordre 1 en 0 ? Tangente à l'origine ? $\arctan(1)$? $\tan \circ \arctan = \dots$? $\arctan \circ \tan = \dots$?

EXERCICE 4. — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas périodique.

EXERCICE 5. — Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que :

1/ $\exists \ell \in [0, 1], f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f)

2/ (u_n) définie par : $u_0 \in [0, 1], u_0 \neq \ell$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

3/ $\forall x \in]0, 1[, |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{3} |u_n - \ell|$. En déduire que (u_n) converge vers ℓ .

EXERCICE 6. — Soient a et b deux réels. Montrer que le polynôme $X^5 + aX + b$ possède au plus 3 racines réelles.

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

Remarques à l'attention des colleurs.

- Dans l'exercice 3, il n'est pas nécessaire de poser toutes les questions de révision concernant arctan ; deux ou trois parmi celles indiquées vous suffiront sans doute à tester la solidité des connaissances.
- Dans l'exercice 5, le détail de la récurrence permettant de conclure est exigible, mais pas nécessairement exigé (c'est une récurrence *a priori* sans aucune difficulté).

EXERCICE 1. — Etablir que la fonction cube est lipschitzienne sur $[0, A]$ pour tout réel $A > 0$.

Soit A un réel strictement positif. Notons f la fonction cube ; f est dérivable sur $[0, A]$ et :

$$\forall x \in [0, A], \quad |f'(x)| \leq 3A^2$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [0, A]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq 3A^2 |x - y|$$

Conclusion. La fonction cube est $3A^2$ -lipschitzienne sur $[0, A]$.

EXERCICE 2. — Etablir que la fonction cube n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

Notons f la fonction cube sur $\mathbb{R}_+$. Par l'absurde, supposons que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$:

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K |x - y| \quad (\spadesuit)$$

Notons que pour tout entier naturel n , on a : $|f(n+1) - f(n)| = 3n^2 + 3n + 1 \quad (\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(n+1) - f(n)| \leq K$. Et d'après $(\clubsuit)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(n+1) - f(n)| = +\infty$. Contradiction !

Conclusion. la fonction cube n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

EXERCICE 3. — Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan(x) \leq x$.

Pour $x = 0$, l'inégalité est triviale.

Soit x un réel strictement positif.

D'après le cours, la fonction arctan est continue sur $[0, x]$, et dérivable sur $]0, x[$. On peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que :

$$\exists c \in]0, x[, \quad \frac{1}{1+c^2} = \frac{\arctan(x)}{x} \iff \exists c \in]0, x[, \quad (1+c^2)\arctan(x) = x$$

Or : $1+c^2 \geq 1$. On en déduit que : $x \geq \arctan(x)$.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan(x) \leq x$.

Remarque : on peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis, et observer que sur $\mathbb{R}$ (donc a fortiori sur $\mathbb{R}_+$), $|\arctan'|$ est majorée par 1 ; arctan est donc 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{R}_+$).

Plus tard dans l'année, on pourra encore justifier cette inégalité en observant que arctan est concave sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 4. — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas périodique.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Prouvons la contraposée : f périodique $\implies f'$ s'annule sur $\mathbb{R}$

Supposons que f est périodique sur $\mathbb{R}$: $\exists T \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$.

En particulier $f(0) = f(T)$. Comme en outre f est continue sur $[0, T]$ et dérivable sur $]0, T[$ (par hypothèse, f est dérivable sur $\mathbb{R}$), le théorème de Rolle permet d'affirmer que :

$$\exists c \in]0, T[, \quad f'(c) = 0$$

Donc f' s'annule sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. $[f' \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}] \implies [f \text{ n'est pas périodique sur } \mathbb{R}]$

EXERCICE 5. — Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que :

- 1/ $\exists \ell \in [0, 1], f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f)
- 2/ (u_n) définie par : $u_0 \in [0, 1], u_0 \neq \ell$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
- 3/ $\forall x \in]0, 1[, |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{3} |u_n - \ell|$. En déduire que (u_n) converge vers ℓ .

Soit n un entier naturel. Entre u_n et ℓ (ces deux réels appartiennent à $[0, 1]$), la fonction f vérifie les hypothèses du TAF (par hypothèse, f est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$). Par suite, il existe un réel c entre u_n et ℓ tel que :

$$(f(u_n) - f(\ell)) = f'(c)(u_n - \ell) \implies |f(u_n) - f(\ell)| = |f'(c)| |u_n - \ell| \implies |u_{n+1} - \ell| = |f'(c)| |u_n - \ell|$$

Comme par hypothèse $|f'| \leq 3^{-1}$, on en déduit que : $\implies |u_{n+1} - \ell| \leq 3^{-1} |u_n - \ell|$.

L'entier naturel n étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on a établi que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \implies |u_{n+1} - \ell| \leq 3^{-1} |u_n - \ell|$$

Par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, \implies |u_n - \ell| \leq 3^{-n} |u_0 - \ell|$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{-n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$.

Conclusion. (u_n) converge, et a pour limite ℓ .

EXERCICE 6. — Soient a et b deux réels. Montrer que le polynôme $X^5 + aX + b$ possède au plus 3 racines réelles.

Soient a et b deux réels. Notons f la fonction associée au polynôme P , définie en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^5 + ax + b$$

Observons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Par l'absurde, supposons que f possède au moins 4 racines réelles : $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Sur chacun des intervalles $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ et $[x_3, x_4]$, la fonction f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.

Explicitement, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$:

- f est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$;
- f est dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$;
- $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$

Par une triple application du théorème de Rolle, il existe trois réels y_1, y_2 et y_3 tels que :

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3 < x_4 \quad \text{et} \quad f'(y_1) = f'(y_2) = f'(y_3) = 0$$

En réitérant le procédé pour la fonction f' , on peut affirmer qu'il existe deux réels z_1 et z_2 tels que :

$$y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < y_3 \quad \text{et} \quad f''(z_1) = f''(z_2) = 0$$

En particulier, f'' s'annule en deux réels distincts (♠).

Or pour tout réel x , on a : $f''(x) = 20x^3$.

Il est donc clair que f'' ne s'annule qu'en zéro (♣).

(♠) et (♣) : contradiction.

Conclusion. Le polynôme $X^5 + aX + b$ possède au plus 3 racines réelles.