

EXERCICES 15 — ENSEMBLES FINIS, GROUPE SYMÉTRIQUE — CORRIGÉS

DÉNOMBREMENT

EXERCICE 1. — Un jeu de cartes “standard” est constitué de 52 cartes, réparties en quatre couleurs (Pique, Coeur, Carreau, Trèfle).

Dans chaque couleur, on trouve donc 13 cartes dont les “valeurs” sont : 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – Valet – Dame – Roi – As.

Une **main** est une combinaison de 5 cartes d’un tel jeu.

1) Combien existe-t-il de mains différentes ?

Une main est une combinaison de 5 cartes parmi les 52 du jeu.

Conclusion. Il existe $\binom{52}{5}$ mains différentes.

2) Quelle est la probabilité d’avoir une *couleur* (5 cartes de la même couleur) ?

On compte le nombre de mains donnant une “couleur”. Il en existe : $\binom{4}{1} \times \binom{13}{5}$ ($\binom{4}{1}$ pour le choix d’une couleur ; et $\binom{13}{5}$ pour le choix des 5 cartes dans une couleur donnée).

Conclusion. La probabilité d’avoir une *couleur* est : $p_1 = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

Pour info : $p_1 = \frac{33}{16660}$, de l’ordre de 2 pour 1000.

3) Quelle est la probabilité d’avoir un *carré* (une main contenant 4 cartes de la même valeur) ?

On compte le nombre de mains donnant un “carré”. Il en existe : $\binom{13}{1} \times \binom{48}{1}$ ($\binom{13}{1}$ pour le choix d’une hauteur ; et $\binom{48}{1}$ pour le choix de la dernière carte).

Conclusion. La probabilité d’avoir un *carré* est : $p_2 = \frac{\binom{13}{1} \times \binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$

Pour info : $p_2 = \frac{1}{4165}$, de l’ordre de... 1 sur 4000.

4) Quelle est la probabilité d’avoir une *quinte flush* (5 cartes de la même couleur, et de valeurs consécutives) ?

On compte le nombre de mains donnant une “quinte flush”. Il en existe : $\binom{4}{1} \times \binom{10}{1}$ ($\binom{4}{1}$ pour le choix d’une couleur ; et $\binom{10}{1}$ pour le choix de la plus basse carte).

Conclusion. La probabilité d'avoir une *quinte flush* est : $p_3 = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{10}{1}}{\binom{52}{5}}$

Pour info : $p_3 = \frac{1}{64974}$, de l'ordre de 1 sur 100 000 ("à la Physicienne").

- 5) Quelle est la probabilité d'avoir un *brelan* (une main contenant 3 cartes de la même valeur) ?

Uniquement pour les joueurs avertis... On compte le nombre de mains contenant 3 cartes de la même hauteur, et on retire celles donnant un carré ou un full. Le nombre de mains donnant un brelan est donc :

$$N = \binom{13}{1} \binom{4}{3} \binom{49}{2} - \binom{13}{1} \binom{48}{1} - \binom{13}{1} \binom{4}{3} \binom{12}{1} \binom{4}{2}$$

Conclusion. La probabilité d'avoir un *brelan* est : $p_4 = \frac{N}{\binom{52}{5}}$.

Pour info : $p_4 = \frac{13}{595}$, de l'ordre de 2 pour 100.

EXERCICE 2. — Soient E et F deux ensembles, et soient A et B deux parties de E et F respectivement. Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$, est-il vrai que :

- 1) si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F ?

Affirmation vraie, d'après le cours. On a en outre : $\text{card}(f(A)) \leq \text{card}(A)$.

- 2) si $f(A)$ est une partie finie de F , alors A est une partie finie de E ?

Affirmation fausse. Posons : $A = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$. La partie A est infinie, alors que $\sin(A) = \{0\}$ est finie.

- 3) si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E ?

Affirmation fausse. Posons : $B = \{0\}$. La partie B est finie, alors que $\sin^{-1}(B) = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ est infinie.

- 4) si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F ?

Affirmation fausse. Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction carrée, et posons : $B = \mathbb{R}_-$. On a : $f^{-1}(B) = \{0\}$. La partie $f^{-1}(B)$ est finie, alors que B est infinie.

EXERCICE 3. — Quel est le coefficient de $a^3b^5c^2$ dans le développement de $(a + b + c)^{10}$?

On compte le nombre de positions pour les a , puis pour les b , OU pour les a , puis pour les c , OU pour les b , puis pour les c , OU pour les b , puis pour les a , OU pour les c , puis pour les a , OU pour les c , puis pour les b parmi les 10 parenthèses du développement. On obtient alors l'un des 6 résultats suivants (qui sont tous égaux) :

$$\binom{10}{3} \times \binom{7}{5} = \binom{10}{3} \times \binom{7}{2} = \binom{10}{5} \times \binom{5}{2} = \binom{10}{5} \times \binom{5}{3} = \binom{10}{2} \times \binom{8}{3} = \binom{10}{2} \times \binom{8}{5}$$

Quelquesoit le moyen choisi, on obtient : 2 520.

EXERCICE 4. — Soient E un ensemble fini de cardinal n , et A une partie de E de cardinal p . Combien existe-t-il de parties de E contenant A ?

Autant que de partie de $E \setminus A$, càd : 2^{n-p} .

EXERCICE 5. — Soit E un ensemble fini de cardinal n . Calculer : $S = \sum_{X \subset E} \text{Card}(X)$

On a : $S = \sum_{X \subset E} \text{Card}(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

EXERCICE 6. — Soient n et p deux entiers naturels, avec $n \leq p$. Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$?

Une application strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$ est uniquement déterminée par l'ensemble $\{y_1, \dots, y_n\}$ de ses images.

Il existe donc $\binom{p}{n}$ applications strictement croissantes de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$?

EXERCICE 7. — On trace dans le plan n droites *en position générale* (c'est à dire deux à deux non parallèles, et trois à trois non concourantes). Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Un triangle est uniquement déterminé par les 3 droites qui le définissent.

Il existe donc $\binom{n}{3}$ triangles dans la configuration de l'énoncé.

GROUPE SYMÉTRIQUE

EXERCICE 8. — Dans cet exercice, on se place dans S_6 .

1) Quel est l'inverse du 4-cycle (1354) ?

D'après le cours : $(1354)^{-1} = (4531) = (1453) = \dots$

2) Vérifier que $\sigma = (14)(43)$ est un 3-cycle. En est-il de même pour $\rho = (43)(14)$?

On a : $\sigma = (14)(43) = (143)$. Donc σ est un 3-cycle. De même : $\rho = (43)(14) = (134)$ est un 3-cycle.

EXERCICE 9. — Dans cet exercice, on se place dans S_7 . On considère la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1/ Ecrire σ comme un produit de cycles disjoints. En déduire la signature de σ .

On a : $\sigma = (1254)(376)$. Il s'ensuit que : $\varepsilon(\sigma) = -1$

2/ Déterminer le plus petit entier naturel N non nul tel que $\sigma^N = \text{id}_{\mathbb{N}_7}$

$N = 12$.

EXERCICE 10. — A propos de S_3 .

1) Décrire les éléments de S_3 .

D'après le cours : $S_3 = \{\text{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

2) On note ρ le 3-cycle (132) . On sait que $G(\rho) = \{\rho^k / k \in \mathbb{N}\}$ est un sous-groupe de S_3 . Décrire $G(\rho)$.

$$G(\rho) = \left\{ \underbrace{\text{id}}_{=\rho^0}, \underbrace{(132)}_{=\rho^1}, \underbrace{(123)}_{=\rho^2} \right\}.$$

3) On note 1, 2 et 3 les sommets d'un triangle équilatéral. Comment les éléments de S_3 agissent-ils sur les sommets de ce triangle ?

Les trois transpositions correspondent aux trois symétries axiales par rapport aux bissectrices du triangle. Les 2 trois cycles correspondent à deux rotations de centre le centre de gravité du triangle, et ayant pour angles $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

EXERCICE 11. — Supports. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Soit $\sigma \in S_n$. On appelle **support** de σ l'ensemble : $\text{supp}(\sigma) = \{i \in \mathbb{N}_n, \sigma(i) \neq i\}$.

1) Que vaut $\text{supp}(\sigma)$ pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$?

On a : $\sigma = (2365)$. D'où : $\text{supp}(\sigma) = \{2, 3, 5, 6\}$.

2) Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que si $i \in \text{supp}(\sigma)$, alors $\sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$.

Cf cours.

3) Montrer que deux permutations σ et τ à supports disjoints commutent.

Cf cours.

EXERCICE 12. — Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1/ Soient i et j deux entiers distincts dans $\llbracket 2, n \rrbracket$. Calculer : $\rho = (1i)(1j)(1i)$.

$$(1i)(1j)(1i) = (ij)$$

2/ Montrer que les transpositions de la forme $(1i)$ avec $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ engendrent S_n .

Selon le cours, les transpositions engendrent S_n . Or d'après la question précédente, toute transposition est produit de transposition de la forme $(1\bullet)$. La conclusion s'ensuit.

EXERCICE 13. — Classes de conjugaison dans S_n . Dans cet exercice, n désigne encore un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soient σ et σ' deux permutations de S_n . On dit que σ' est **conjuguée** à σ s'il existe une permutation $\tau \in S_n$ telle que : $\sigma' = \tau^{-1}\sigma\tau$.

1/ Montrer que la relation de conjugaison (définie ci-dessus) est une relation d'équivalence sur S_n .

Par la suite, on pourra donc dire que σ et σ' sont conjuguées lorsque σ' est conjuguée à σ ou σ est conjuguée à σ' ; on pourra le noter $\sigma' \sim \sigma$.

Pour tout $\sigma \in S_n$, on a : $\sigma = \text{id}^{-1}\sigma\text{id}$. Donc σ est conjuguée à elle-même. Ce qui prouve la réflexivité de la relation $\sim$.

Soient σ et σ' dans S_n telles que : $\sigma' = \tau^{-1}\sigma\tau$. Alors : $\sigma = \rho^{-1}\sigma'\rho$ en ayant posé : $\rho = \tau^{-1}$. Ce qui prouve la symétrie de la relation $\sim$.

Soient σ , σ' et σ'' dans S_n telles que : $\sigma' = \tau^{-1}\sigma\tau$ et $\sigma'' = \rho^{-1}\sigma'\rho$.

Alors : $\sigma'' = \rho^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau\rho$. D'où : $\sigma'' = \varphi^{-1}\sigma\varphi$ en ayant posé : $\varphi = \tau\rho$. Ce qui prouve la transitivité de la relation $\sim$.

Conclusion. La relation $\sim$ de conjugaison sur les permutations est une réflexion binaire réflexive, symétrique et transitive : c'est donc une relation d'équivalence sur S_n .

2/ Quelles sont les permutations conjuguées à l'identité ?

L'identité n'est conjuguée qu'à elle-même.

3/ Soit σ une permutation de S_n , et soit $m \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Montrer que :

$$\sigma(12 \cdots m)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(m))$$

Un peu long à rédiger... Mais je peux vous l'expliquer "en live" si vous le souhaitez !

4/ En déduire que deux cycles sont conjugués si et seulement si leurs longueurs sont égales.

C'est un corollaire immédiat de la question précédente.