

COLLE 20 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1 — $f = o_a(g) \iff \lim_a \frac{f}{g} = 0$

PREUVE. $f = o_a(g) \iff f = g\varepsilon$ avec $\lim_a \varepsilon = 0 \iff \frac{f}{g} = \varepsilon$ avec $\lim_a \varepsilon = 0 \iff \lim_a \frac{f}{g} = 0$

Conclusion. $f = o_a(g) \iff \lim_a \frac{f}{g} = 0$

Remarque. Il n'est pas indispensable d'inclure dans cette démo (ni dans les deux suivantes) des “ x ”, des quantificateurs, et des hypothèses... du moment que l'on sait de quoi il est question !

Explicitement, on suppose ici que :

- a est un nombre réel ;
- f et g sont 2 fonctions définies sur un même voisinage V de a , et sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ;
- g ne s'annule pas sur V , pour que le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ soit défini lorsque $x \in V$;
- ε est une fonction définie sur V , à valeurs dans $\mathbb{K}$, et vérifie : $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

QUESTION DE COURS 2 — $f \sim_a g \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1$

PREUVE. $f \sim_a g \iff f = g\varphi$ avec $\lim_a \varphi = 1 \iff \lim_a \frac{f}{g} = \varphi$ avec $\lim_a \varphi = 1 \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1$

Conclusion. $f \sim_a g \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1$

QUESTION DE COURS 3 — $f \sim_a g \iff f = g + o_a(g)$

PREUVE. $f \sim_a g \iff f = g\varphi$ avec $\lim_a \varphi = 1 \iff f = g(1 + \varphi - 1)$ avec $\lim_a \varphi = 1$
 $\iff f = g + (\varphi - 1)g$ avec $\lim_a \varphi = 1 \iff f = g + \varepsilon g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0 \iff f = g + o_a(g)$

Conclusion. $f \sim_a g \iff f = g + o_a(g)$

QUESTION DE COURS 4 — Si $f \sim_a g$ alors : $f = O_a(g)$ (et $g = O_a(f)$)

Comme $f \sim_a g$, on a : $f = g + o_a(g)$. Or $g = O_a(g)$ et $o_a(g) = O_a(g)$. D'où $f = O_a(g) + O_a(g)$, donc : $f = O_a(g)$. La relation $g = O_a(f)$ résulte par exemple du fait que la relation d'équivalence au voisinage de a est symétrique.

QUESTION DE COURS 5 — Si $f \sim_a g$ et $g = o_a(h)$ alors $f = o_a(h)$

Comme $f \sim_a g$, on a : $f = g + o_a(g)$. Or $g = o_a(h)$. D'où $f = o_a(h) + o_a(o_a(h))$, donc : $f = o_a(h) + o_a(h)$ d'où : $f = o_a(h)$.

QUESTION DE COURS 6 — Si $f \sim_a g$ et $g = O_a(h)$ alors $f = O_a(h)$

Comme $f \sim_a g$, on a : $f = g + o_a(g)$. Or $g = O_a(h)$. D'où $f = O_a(h) + o_a(O_a(h))$, donc : $f = O_a(h) + o_a(h)$ d'où : $f = O_a(h)$.

QUESTION DE COURS 7 — Si $f = o_a(g)$ et $g \sim h$ alors $f = o_a(h)$

Comme $g \sim h$, on a : $g = h + o_a(h)$. Or $f = o_a(g)$. D'où $f = o_a(h) + o_a(o_a(h))$, d'où : $f = o_a(h)$.

QUESTION DE COURS 8 — Si $f = O_a(g)$ et $g \sim_a h$ alors $f = O_a(h)$

Comme $g \sim_a h$, on a : $g = h + o_a(h)$. Or $f = O_a(g)$. D'où $f = O_a(h) + O_a(o_a(h))$, donc $f = O_a(h) + o_a(h)$ d'où : $f = O_a(h)$.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1 — On note g la fonction définie sur $[1, 2]$ en posant :

$$\forall x \in [1, 2], \quad g(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x}$$

1/ Montrer que : $\forall x \in [1, 2], \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2/ Montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par g .

EXERCICE 2 — Soit $g \in \mathcal{C}^1([1, 2], \mathbb{R})$, et $\alpha \in [1, 2]$. On suppose que :

$$g([1, 2]) \subset [1, 2]; \quad \forall x \in [1, 2], \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g(\alpha) = \alpha$$

On définit une suite (u_n) en posant :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

1/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, 2]$

2/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

EXERCICE 3 — Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs réelles, et soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $f'(x_0) \neq 0$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 .

EXERCICE 4 — Soit $g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, soit $\ell \in [a, b]$, et soit λ un réel appartenant à $]0, 1[$.

On suppose que $g(\ell) = \ell$ et $g'(\ell) = 0$.

1/ Justifier qu'il existe un réel $h > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\ell - h, \ell + h], \quad |g'(x)| \leq \lambda$$

2/ On note I l'intervalle $[\ell - h, \ell + h]$. Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) \in I$$

EXERCICE 5 — En utilisant un équivalent simple, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ en fonction du paramètre réel α .

EXERCICE 6 — Le code ci-dessous est celui d'une fonction qui reçoit comme paramètre une liste de flottants L , et qui retourne la moyenne des éléments de L .

```
def Moyenne(L):
    SommeVal = 0
    for k in range(len(L)):
        SommeVal = SommeVal + L[k]
    return SommeVal / len(L)
```

1/ Estimer la complexité algorithmique $C(n)$ de cette fonction (n désignant la longueur de la liste L).

2/ Cette complexité est-elle linéaire ? Quadratique ? Logarithmique ?

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1 — On note g la fonction définie sur $[1, 2]$ en posant :

$$\forall x \in [1, 2], \quad g(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x}$$

1/ Montrer que : $\forall x \in [1, 2], \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Pour tout réel $x \in [1, 2]$, on a : $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

On en déduit que g est dérivable sur $[1, 2]$, et que pour tout réel $x \in [1, 2]$ on a : $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$

Il est immédiat que g' est croissante sur $[1, 2]$, donc :

$$\forall x \in [1, 2], \quad g'(1) \leq g'(x) \leq g'(2) \quad \text{ainsi :} \quad \forall x \in [1, 2], \quad -\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{1}{4}$$

CONCLUSION. $\forall x \in [1, 2], \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2/ Montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par g .

Soit x un réel de $[1, 2]$. On a :

$$g'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \geq 0 \iff x \geq \sqrt{2}$$

On en déduit le tableau de variation ci-contre de la fonction g .

En particulier : $g([1, 2]) = [\sqrt{2}, 3/2] \subset [1, 2]$

x	1	$\sqrt{2}$	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$3/2$	$\sqrt{2}$	$3/2$

CONCLUSION. Le segment $[1, 2]$ est stable par g ($g([1, 2]) \subset [1, 2]$).

EXERCICE 2 — Soit $g \in \mathcal{C}^1([1, 2], \mathbb{R})$, et $\alpha \in [1, 2]$. On suppose que :

$$g([1, 2]) \subset [1, 2]; \quad \forall x \in [1, 2], \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g(\alpha) = \alpha$$

On définit une suite (u_n) en posant :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

1/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, 2]$

Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$ l'assertion : $u_n \in [1, 2]$.

L'assertion $P(0)$ est vraie puisque $u_0 = 1$ selon l'énoncé.

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n .

Sous cette hypothèse, $u_n \in [1, 2]$; et puisque $g([1, 2]) \subset [1, 2]$ selon l'énoncé, on a : $u_{n+1} = g(u_n) \in [1, 2]$. Ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, 2]$

2/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

Soit n un entier naturel. Les réels u_n et α sont dans $[1, 2]$ selon la question précédente et l'énoncé.

En outre, toujours selon l'énoncé, on a : $\forall x \in [1, 2], \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. On en déduit, avec l'inégalité des accroissements finis que :

$$|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

On conclut en observant que $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(\alpha) = \alpha$.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

EXERCICE 3 — Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs réelles, et soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $f'(x_0) \neq 0$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 .

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. L'abscisse recherchée est donc le réel x tel que :

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0 \quad \text{soit : } x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

CONCLUSION. L'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 est

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

EXERCICE 4 — Soit $g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, soit $\ell \in [a, b]$, et soit λ un réel appartenant à $]0, 1[$.

On suppose que $g(\ell) = \ell$ et $g'(\ell) = 0$.

1/ Justifier qu'il existe un réel $h > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\ell - h, \ell + h], \quad |g'(x)| \leq \lambda$$

On a : $g'(\ell) = 0$, et g' est continue en ℓ . Par suite : $\lim_{x \rightarrow \ell} g'(x) = 0$.

On conclut grâce à la définition de limite.

CONCLUSION. $\forall \lambda \in]0, 1[, \exists h \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [\ell - h, \ell + h], \quad |g'(x)| \leq \lambda$

2/ On note I l'intervalle $[\ell - h, \ell + h]$. Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) \in I$$

Soit λ un réel quelconque de $]0, 1[$, et soit $x \in I$. On a : $|x - \ell| \leq h$.

Par ailleurs, il résulte de la question précédente que g est λ -lipschitzienne sur I . Par suite :

$$|g(x) - g(\ell)| \leq \lambda |x - \ell|$$

Puisque ℓ est un point fixe de g (énoncé), et que $|x - \ell| \leq h$, on en déduit que :

$$|g(x) - \ell| \leq \lambda h \leq h$$

Ce qui signifie que $g(x) \in I$.

CONCLUSION. $g(I) \subset I$ (I est stable par g).

EXERCICE 5 — En utilisant un équivalent simple, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ en fonction du paramètre réel α .

Selon le cours, $\arctan(x) \sim_0 x$. Il s'ensuit que : $\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$

Par suite : $n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} n^{\alpha-1}$

Conclusion. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$

EXERCICE 6 — Le code ci-dessous est celui d’une fonction qui reçoit comme paramètre une liste de flottants L , et qui retourne la moyenne des éléments de L .

```
def Moyenne(L):
    SommeVal = 0
    for k in range(len(L)):
        SommeVal = SommeVal + L[k]
    return SommeVal / len(L)
```

1/ Estimer la complexité algorithmique $C(n)$ de cette fonction (n désignant la longueur de la liste L).

```
# On note 'oe' une opération élémentaire
def Moyenne(L):
    SommeVal = 0 # 1 oe (affectation)
    for k in range(len(L)): # boucle parcourue n fois
        SommeVal = SommeVal + L[k] # 3 oe (affectation, somme, extraction)
    return SommeVal / len(L) # 2oe (quotient, appel de la fonction len)
```

Conclusion. La complexité algorithmique de cette fonction $C(n) = 3n + 3$

2/ Cette complexité est-elle linéaire ? Quadratique ? Logarithmique ?

D’après la question précédente : $C(n) = O_{+\infty}(n)$. Il s’agit donc d’une complexité linéaire.

Juste pour info :

- Exemple de fonction ayant une complexité quadratique ($O_{+\infty}(n^2)$) : fonction calculant la somme de deux matrices carrées de $M_n(\mathbb{R})$;
- Exemple de fonction ayant une complexité logarithmique ($O_{+\infty}(\ln(n))$) : fonction recherchant une valeur approchée d’une solution de $f(x) = 0$ par l’algorithme de dichotomie.