

EXERCICES 18 — DL ET ÉQUIVALENTS — CORRIGÉ

EXERCICE 1. — Déterminer le développement limité à l'ordre n en a des expressions suivantes :

1/ $f(x) = xe^{-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$).

On commence par écrire le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Puis on effectue le changement de variable $X = -x$ pour obtenir* :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Pour finir : $xe^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

2/ $f(x) = e^{x^3}$ (avec $a = 0$ et $n = 8$).

On commence par écrire le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Puis on effectue le changement de variable $X = x^3$ pour obtenir† :

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + x^8\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

3/ $f(x) = (1+x)^{3/2}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$).

Il suffit d'écrire le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (formulaire), avec $\alpha = 3/2$:

$$(1+x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Soit : $(1+x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

4/ $f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$).

On a : $f(x) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x)$.

Le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$ est donné par le formulaire :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Pour obtenir le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x^2)$, on effectue le changement de variable $X = x^2$ dans le précédent, pour obtenir‡ :

$$\ln(1+x^2) = x^2 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

On en déduit que : $\ln\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right) = -x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

5/ $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$).

On écrit d'abord : $f(x) = \ln(1+x) \times \frac{1}{1-x}$.

D'après le formulaire, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

et

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

*. Légitimement car $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$.

†. Légitimement car $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$.

‡. Légitimement car $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

Puis on applique la règle permettant d'obtenir le DL d'un produit de fonctions : on effectue le produit des parties régulières, en tronquant à l'ordre 3, c'est-à-dire en ne tenant pas compte des puissances de x supérieures ou égales à 4, ce qui donne la ligne ci-dessous.

$$\ln(1+x) \times \frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+x^3) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

D'où :

$$\ln(1+x) \times \frac{1}{1-x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\text{Soit finalement : } \ln(1+x) \times \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$1/ f(x) = e^{1-x^2} \text{ (avec } a = 0 \text{ et } n = 6).$$

Attention : on ne peut pas directement poser $X = 1 - x^2$ dans le DL de l'exponentielle, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - x^2 \neq 0$.

Pour contourner le problème, on observe que : $e^{1-x^2} = e \times e^{-x^2}$.

Puis on écrit le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

On effectue ensuite le changement de variable $X = -x^2$ pour obtenir § :

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + x^6\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\text{Finalement : } e^{1-x^2} = e - ex^2 + \frac{ex^4}{2!} - \frac{ex^6}{3!} + x^6\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$7/ f(x) = (1-x)e^{2x} \text{ (avec } a = 0 \text{ et } n = 3).$$

On écrit le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

On effectue ensuite le changement de variable $X = 2x$ pour obtenir ¶ :

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Puis on multiplie la partie régulière de ce DL par $(1-x)$, en ne tenant pas compte des puissances de x supérieures ou égales à 4 :

$$(1-x)e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} - x - 2x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\text{Finalement : } (1-x)e^{2x} = 1 + x - \frac{2x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$8/ f(x) = e^{\operatorname{sh} x} \text{ (avec } a = 0 \text{ et } n = 4).$$

D'après le formulaire :

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

et

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Puis, dans le DL de e^x , on remplace tous les " x " par des " $x + \frac{x^3}{6}$ " (partie régulière du DL de $\operatorname{sh}(x)$). Alors :

$$e^{\operatorname{sh}(x)} = 1 + \left(x + \frac{x^3}{6} \right) + \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} \right)^2}{2} + \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} \right)^3}{6} + \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} \right)^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

§. Légitimement cette fois-ci car $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$.

¶. Légitimement car $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$.

Donc :

$$e^{\text{sh}(x)} = 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Finalement : $e^{\text{sh}(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

9/ $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$).

D'après le formulaire : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$

D'où : $e^{\sqrt{1+x}} = \exp\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right) = e \times \exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right)$

Or :

$$\exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

D'où :

$$\exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$$

Finalement : $e^{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{x}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

10**/ $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$).

On a (formulaire) : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$

Ainsi : $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}} = \sqrt{2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)} \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

D'où : $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + x^2\varepsilon(x)} \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Arrivé à cet endroit, on effectue un nouveau changement de variable, en posant $X = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}$.

Puisque : $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + X^2\varepsilon(X)$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} = 0$, on en déduit :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1+x}} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}}{2} - \frac{\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right)^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \right) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Donc : $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}} = \sqrt{2} \left[1 + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{32} - \frac{x^2}{128} \right] + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Finalement : $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}} = \sqrt{2} \left[1 + \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{128} \right] + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

EXERCICE 2. — (DL, équivalents et limites). On peut lever des indéterminations en effectuant un DL en 0 à un ordre judicieusement choisi.

Exemples : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (DL à l'ordre 1 en 0 de $\sin$) ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ (DL à l'ordre 3 en 0 de $\sin$)

1/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{3x}$

On a : $\arctan(x) \sim_0 x$. D'où : $\frac{\arctan(x)}{3x} \sim_0 \frac{1}{3}$. Par suite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{3x} = \frac{1}{3}$.

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((1+x)(1+2x))}{x}$$

Pour tout réel $x > 0$, on a : $\ln((1+x)(1+2x)) = \ln(1+x) + \ln(1+2x)$.

D'où : $\ln((1+x)(1+2x)) = x + o(x) + 2x + o(x)$ soit $\ln((1+x)(1+2x)) = 3x + o(x)$

En particulier : $\ln((1+x)(1+2x)) \sim_0 3x$. D'où : $\frac{\ln((1+x)(1+2x))}{x} \sim_0 3$.

Par suite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((1+x)(1+2x))}{x} = 3$.

$$3/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + 2x}$$

D'une part : $\sin(x) \sim_0 x$, et d'autre part : $x^2 + 2x \sim_0 2x$. D'où : $\frac{\sin(x)}{x^2 + 2x} \sim_0 \frac{1}{2}$. Par suite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + 2x} = \frac{1}{2}$.

$$4/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$$

Ecrivons un DL à l'ordre 4 en 0 de $\tan^2(x)$.

D'après le formulaire : $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$. Par suite : $\tan^2(x) = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$.

On en déduit que : $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)} \right]$ (♠)

Par ailleurs, d'après le formulaire encore : $\frac{1}{1+X} = 1 - X + o(X)$.

On en déduit que : $\frac{1}{1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)} = 1 - \frac{2x^2}{3} + o(x^2)$. D'où : $1 - \frac{1}{1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{2x^2}{3} + o(x^2)$ (♣).

D'après (♠) et (♣) : $\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)} \right] \sim_0 \frac{1}{x^2} \times \frac{2x^2}{3}$. Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{2}{3}$

$$5/ \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x + 1) \sin\left(\frac{1}{\pi x^2}\right)$$

D'une part, puisque $\sin(X) \sim_0 X$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi x^2} = 0$, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{\pi x^2}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi x^2}$$

D'autre part : $2x^2 - x + 1 \sim_{+\infty} 2x^2$.

On en déduit que : $(2x^2 - x + 1) \sin\left(\frac{1}{\pi x^2}\right) \sim_{+\infty} 2x^2 \times \frac{1}{\pi x^2}$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x + 1) \sin\left(\frac{1}{\pi x^2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

$$6/ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{n} + \sqrt[3]{n + \sqrt{n}}}{2\sqrt{n} + \ln(n+1) + e^{-n}}$$

Puisque $\sqrt{n} = o_{+\infty}(n)$, on a : $\sqrt[3]{n + \sqrt{n}} \sim_{+\infty} \sqrt[3]{n}$.

Et comme : $\sqrt[3]{n} = o_{+\infty}(\sqrt{n})$, on a : $3\sqrt{n} + \sqrt[3]{n + \sqrt{n}} \sim_{+\infty} 3\sqrt{n}$ (♠).

Par ailleurs, puisque : $\ln(n+1) + e^{-n} = o_{+\infty}(\sqrt{n})$, on a : $2\sqrt{n} + \ln(n+1) + e^{-n} \sim_{+\infty} 2\sqrt{n}$ (♣).

D'après (♠) et (♣) : $\frac{3\sqrt{n} + \sqrt[3]{n + \sqrt{n}}}{2\sqrt{n} + \ln(n+1) + e^{-n}} \sim_{+\infty} \frac{3\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$.

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{n} + \sqrt[3]{n + \sqrt{n}}}{2\sqrt{n} + \ln(n+1) + e^{-n}} = \frac{3}{2}$.

$$7/ \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)} \text{ avec } 0 < a < \frac{\pi}{2}.$$

Le premier réflexe ici est de faire un **retour à l'origine**, c'est-à-dire un changement de variable permettant de se ramener à un calcul de limite en 0. On pose donc :

$$X = x - a \quad (\text{donc } x = X + a)$$

Moyennant ce changement de variable, l'énoncé de l'exo se réécrit :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(X+a) - \sin(a)}{\sin(X)}$$

On a déjà : $\sin(X) \sim_0 X$ (♠)

Par ailleurs :

$$\sin(X+a) - \sin(a) = \sin(X)\cos(a) + \sin(a)\cos(X) - \sin(a) = \sin(X)\cos(a) + \sin(a)(\cos(X) - 1)$$

On en déduit que : $\sin(X+a) - \sin(a) \sim_0 \sin(X)\cos(a)$.

D'où : $\sin(X+a) - \sin(a) \sim_0 X\cos(a)$ (♣)

D'après (♠) et (♣) : $\frac{\sin(X+a) - \sin(a)}{\sin(X)} \sim_0 \cos(a)$. Par suite : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)} = \cos(a)$

$$8/ \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\sin(x-a)} \text{ où } a \text{ est un réel } > 0 \text{ arbitraire}$$

Comme dans la question précédente, on effectue un **retour à l'origine**, en posant :

$$X = x - a \quad (\text{donc } x = X + a)$$

Moyennant ce changement de variable, l'énoncé de l'exo se réécrit :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\sin(x-a)} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{(X+a)^a - a^{X+a}}{\sin(X)}$$

On a déjà : $\sin(X) \sim_0 X$ (♠)

Par ailleurs, en prévoyant quelques aspirines pour la route :

$$\begin{aligned} (X+a)^a - a^{X+a} &= e^{a \ln(X+a)} - e^{(X+a) \ln(a)} \\ &= e^{a \ln(a(1+\frac{X}{a}))} - e^{X \ln(a)} e^{a \ln(a)} \\ &= e^{a \ln(a) + a \ln(1+\frac{X}{a})} - e^{X \ln(a)} e^{a \ln(a)} \\ &= e^{a \ln(a)} e^{a \ln(1+\frac{X}{a})} - e^{X \ln(a)} e^{a \ln(a)} \\ &= e^{a \ln(a)} \left[e^{a \ln(1+\frac{X}{a})} - e^{X \ln(a)} \right] \\ &= e^{a \ln(a)} \left[e^{a \frac{X}{a} + o_0(X)} - e^{X \ln(a)} \right] \\ &= e^{a \ln(a)} [1 + X + o_0(X) - 1 - X \ln(a) - o_0(x)] \\ &= e^{a \ln(a)} [X(1 - \ln(a)) + o_0(x)] \end{aligned}$$

Ainsi : $(X + a)^a - a^{X+a} \sim_0 a^a X(1 - \ln(a))$ (♣)

D'après (♠) et (♣) : $\frac{(X + a)^a - a^{X+a}}{\sin(X)} \sim_0 a^a(1 - \ln(a))$.

Par suite : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\sin(x - a)} = a^a(1 - \ln(a))$

EXERCICE 3. — (Tangentes et positions relatives) Soit f une fonction définie au voisinage de 0, ayant comme DL : $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$. Alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente T au point d'abscisse 0 d'équation $y = a_0 + a_1x$. La position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T est donnée **au voisinage de 0** par le signe du premier terme non nul de degré ≥ 2 .
A vous de jouer : dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, et préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T au voisinage de 0 :

1/ $f(x) = (2x + 1)e^x$

Soit x un réel. On a : $f(x) = (2x + 1) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)$.

D'où : $f(x) = 2x + 1 + 2x^2 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + 3x + \frac{5x^2}{2} + o(x^2)$.

On en déduit que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y = 1 + 3x$; au voisinage de 0, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de cette tangente (signe de $5x^2/2$).

2/ $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x}$

Soit x un réel tel que $|x| < 1$. On a : $f(x) = \sin(x) \times \frac{1}{1+x}$.

Ainsi : $f(x) = (x + o(x^2)) \times (1 - x + x^2 + o(x^2))$. Donc : $f(x) = x - x^2 + o(x^2)$.

On en déduit que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y = x$; au voisinage de 0, $\mathcal{C}_f$ est située en-dessous de cette tangente (signe de $-x^2$).

3/ $f(x) = \ln(1 + x + x^2) \sqrt{1 + 2x}$

Soit x un réel tel que $|x| < 1/2$.

D'une part : $\sqrt{1 + 2x} = (1 + 2x)^{1/2} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

D'autre part : $\ln(1 + x + x^2) = (x + x^2) - \frac{(x + x^2)^2}{2} + o(x^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Donc : $f(x) = \left(1 + x - \frac{x^2}{2} \right) \left(x + \frac{x^2}{2} \right) + o(x^2) = x + \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2)$

Soit : $f(x) = x + \frac{3x^2}{2} + o(x^2)$

On en déduit que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y = x$; au voisinage de 0, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de cette tangente (signe de $3x^2/2$).

EXERCICE 4. — (DL et asymptotes) Par le biais du changement de variable " $X = 1/x$ " dans les DL usuels, on peut obtenir des "DL en $+\infty$ ", appelés développements asymptotiques, permettant d'obtenir entre autres des équations d'asymptotes et des positions relatives au voisinage de $+\infty$.

Par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{x^2 + x + 1} = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit que la courbe représentant $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + 1/2$, et que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de celle-ci **au voisinage de $+\infty$** .

A vous de jouer ; dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de l'asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote :

1/ $f(x) = x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

Soit x un réel strictement positif.

On a : $\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{x^3} \right)$

D'où : $x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$

On en déduit que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x - \frac{1}{2}$; au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de cette asymptote (signe de $\frac{1}{3x}$).

2/ $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Soit x un réel strictement positif.

On a : $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}$.

Or : $\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{2} - \frac{\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)^2}{8} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$

$\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$

$\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$

On en déduit que :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = x + 1 + \frac{1}{2x} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{2x} \right)$$

Subséquentement, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x + 1$; au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de cette asymptote (signe de $\frac{1}{2x}$).

EXERCICE 5. — 1/ Soit a un réel > 0 . Justifier que : $a^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} \ln(a) + o \left(\frac{1}{n} \right)$

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $a^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln(a)}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(a)$, on en déduit que : $a^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} \ln(a) + o \left(\frac{1}{n} \right)$.

2/ (*) Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3^{\sqrt[n]{2}} - 2^{\sqrt[n]{3}} \right)^n = \frac{8}{9}$

Soit n un entier naturel non nul.

On a : $\left(3^{\sqrt[n]{2}} - 2^{\sqrt[n]{3}} \right)^n = e^{n \ln(u_n)}$ en ayant posé : $u_n = 3^{\sqrt[n]{2}} - 2^{\sqrt[n]{3}}$.

D'après la question précédente :

$$u_n = 3 \left(1 + \frac{1}{n} \ln(2) + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) - 2 \left(1 + \frac{1}{n} \ln(3) + o \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

soit : $u_n = 1 + \frac{1}{n} (3 \ln(2) - 2 \ln(3)) + o \left(\frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{n} \ln \left(\frac{8}{9} \right) + o \left(\frac{1}{n} \right)$

On en déduit que : $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{8}{9}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Par suite : $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{8}{9}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc : $\ln(u_n) \sim_{+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{8}{9}\right)$.

Donc : $n \ln(u_n) \sim_{+\infty} \ln\left(\frac{8}{9}\right)$. En particulier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(u_n) = \ln\left(\frac{8}{9}\right)$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(u_n)} = e^{\ln(\frac{8}{9})}$

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3^{\sqrt[n]{2}} - 2^{\sqrt[n]{3}}\right)^n = \frac{8}{9}$

EXERCICE 6. — (*) Soit n un entier naturel quelconque, et f la fonction définie sur $] -1; 1[$ par :

$$f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ en 0 de f .

Soit n un entier naturel quelconque, et x un réel de $] -1; 1[$.

On a : $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x))$.

D'après le formulaire : $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^{2n+2})$ et $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{x^k}{k} + o(x^{2n+2})$.

On en déduit que : $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{x^k}{k} \right) + o(x^{2n+2})$

D'où : $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n+2} ((-1)^{k+1} + 1) \frac{x^k}{k} + o(x^{2n+2})$

Donc : $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$

EXERCICE 7. —

- 1) $f(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$
- 2) $f(x) = 4x - \frac{32}{3}x^3 + o(x^4)$
- 3) $f(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$
- 4) $f(x) = 3x - 9x^3 + o(x^4)$
- 5) $f(x) = x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$
- 6) $f(x) = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^8)$
- 7) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}x - \frac{\sqrt{3}}{18}x^2 + o(x^2)$
- 8) $f(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$
- 9) $f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$
- 10) $f(x) = 2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{288}x^2 + o(x^2)$
- 11) $f(x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
- 12) $f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$
- 13) $f(x) = e - ex^2 + \frac{e}{2}x^4 - \frac{e}{6}x^6 + o(x^6)$
- 14) $f(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$
- 15) $f(x) = e^2 + e^2x - \frac{e^2}{3}x^3 - \frac{e^2}{6}x^4 + o(x^4)$
- 16) $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$
- 17) $f(x) = e + \frac{e}{2}x + o(x^2)$
- 18) $f(x) = \ln 2 + \frac{\alpha + \beta}{2}x + \frac{(\alpha - \beta)^2}{8}x^2 + o(x^2)$
- 19) $f(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{128}x^2 + o(x^2)$
- 20) $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}x^2 + o(x^2)$
- 21) $f(x) = -2x^2 - 7x^3 + o(x^3)$
- 22) $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
- 23) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{24}x^2 + o(x^3)$
- 24) $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + o(x^3)$
- 25) $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^3)$
- 26) $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$
- 27) $f(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$
- 28) $f(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$
- 29) $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^4)$
- 30) $f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$
- 31) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$
- 32) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \right) + o(x^4)$
- 33) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^7)$
- 34) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$
- 35) $f(x) = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{11}{9}x^2 + \frac{104}{81}x^3 + o(x^3)$
- 36) $f(x) = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^5)$
- 37) $f(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o(x^7)$
- 38) $f(x) = \sqrt{e} \left(1 - \frac{1}{12}x^2 \right) + o(x^3)$
- 39) $f(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 - \frac{61}{240}x^6 + o(x^7)$
- 40) $f(x) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + \frac{32}{45}x^6 - \frac{173}{252}x^8 + o(x^9)$
- 41) $f(x) = 1 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$
- 42) $f(x) = e \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 \right) + o(x^2)$
- 43) $f(x) = e \left(1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 \right) + o((x-1)^2)$
- 44) $f(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$
- 45) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$
- 46) $f(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + o((x-4)^2)$
- 47) $f(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 + o((x-\pi)^4)$
- 48) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-\pi/2)^2 + o((x-\pi/2)^3)$
- 49) $f(x) = -(x-\pi/2) - \frac{1}{6}(x-\pi/2)^3 + o((x-\pi/2)^4)$
- 50) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/3) - \frac{1}{4}(x-\pi/3)^2 + o((x-\pi/3)^2)$
- 51) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{120}\frac{1}{x^5} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$
- 52) $f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x^2} + \frac{7}{90}\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)$
- 53) $f(x) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}(x-\pi/3) - \frac{3\sqrt{3}}{16}(x-\pi/3)^2 + \frac{3}{16}(x-\pi/3)^3 + o((x-\pi/3)^3)$
- 54) $f(x) = 1 + 2(x-\pi/4) + 2(x-\pi/4)^2 + \frac{8}{3}(x-\pi/4)^3 + o((x-\pi/4)^3)$
- 55) $f(x) = 1 + (x-\pi/4) + \frac{1}{2}(x-\pi/4)^2 + o((x-\pi/4)^2)$
- 56) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4 + o((x-2)^4)$
- 57) $f(x) = x - x^3 + x^5 + o(x^6)$