

COLLE 21 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1 — Propriété. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. Si f est paire (*resp.* impaire), alors les termes de degrés impairs (*resp.* pairs) de la partie régulière de son DL à l'ordre n en 0 sont nuls.

PREUVE. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage I de 0 (I symétrique par rapport à 0).

► On commence par rappeler que si $\varphi : J \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction dérivable et paire (*resp.* impaire) et φ' est impaire (*resp.* paire). En effet, sous ces hypothèses :

$$\left[\underbrace{\forall x \in J, \varphi(-x) = \varphi(x)}_{\varphi \text{ paire}} \right] \Rightarrow \left[\underbrace{\forall x \in J, -\varphi'(-x) = \varphi'(x)}_{\varphi' \text{ impaire}} \right]$$

$$\text{resp. } \left[\underbrace{\forall x \in J, \varphi(-x) = -\varphi(x)}_{\varphi \text{ impaire}} \right] \Rightarrow \left[\underbrace{\forall x \in J, -\varphi'(-x) = -\varphi'(x)}_{\varphi' \text{ paire}} \right]$$

On en déduit par une récurrence immédiate* que :

$$\varphi : J \rightarrow \mathbb{K} \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ et paire} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \varphi^{(2n)} \text{ est paire} \\ \varphi^{(2n+1)} \text{ est impaire} \end{cases} \quad (\spadesuit)$$

et bien évidemment :

$$\varphi : J \rightarrow \mathbb{K} \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ et impaire} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \varphi^{(2n)} \text{ est impaire} \\ \varphi^{(2n+1)} \text{ est paire} \end{cases} \quad (\clubsuit)$$

► Ces rappels faits, revenons à la fonction f . Puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage I de 0 par hypothèse, elle admet un DL en 0 à tout ordre selon la formule de Taylor. Pour tout entier naturel n , et pour tout réel x de I on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad (\heartsuit)$$

Si f est paire, on déduit de $(\spadesuit)$ que $f^{(2k+1)}$ est impaire pour tout entier naturel k . Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k+1)}(0) = 0$.

On en déduit, avec $(\heartsuit)$, que : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$. Ainsi, si f est paire, la partie régulière du DL en 0 de la fonction f “ne comporte que des puissances paires”, ce qu'il fallait démontrer. Raisonement analogue dans le cas où f est impaire, mutatis mutandis.

QUESTION DE COURS 2 — Application de la formule de Taylor 1. DL en 0 à l'ordre $2n$ de $\cos$.

Soit n un entier naturel quelconque. La fonction $\cos$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet en particulier un DL à l'ordre $2n$ en 0, qui est donné par la formule de Taylor :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n})$$

En séparant dans la partie régulière les termes de rangs pairs et ceux de rangs impairs, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\cos^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n})$$

Or la fonction $\cos$ étant paire, toutes ses dérivées d'ordre impair sont impaires.

Il s'ensuit que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \cos^{(2k+1)}(0) = 0$. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\cos^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$$

En outre, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on a : $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Il s'ensuit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2k)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

Finalement : $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

*. Convincez vous rapidement que vous sauriez la faire si on vous le demandait.

QUESTION DE COURS 3 — Application de la formule de Taylor 2. DL en 0 à l'ordre $2n + 1$ de sh.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction sh étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, elle admet un DL à l'ordre $2n + 1$ en 0, donné par la formule de Taylor :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\text{sh}^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+1})$$

Observons que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \implies \forall (k, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad \text{sh}^{(k)}(x) = \frac{e^x - (-1)^k e^{-x}}{2}$

Il s'ensuit que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sh}^{(k)}(0) = \frac{1 - (-1)^k}{2}$. Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sh}^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$

QUESTION DE COURS 4 — Application de la formule de Taylor 3. DL en 0 à un ordre n arbitraire de $f : x \mapsto 1/(1-x)$. En déduire le DL en 0 à tout ordre de la fonction arctangente.

PREUVE. Notons $I =]-1, 1[$. La fonction $f : x \mapsto 1/(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I d'après les théorèmes généraux. Commençons par établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

On note $P(n)$ la propriété : " $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ ".

L'initialisation est immédiate. Supposons donc $P(n)$ établie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Alors $f^{(n)}$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right) = \frac{n! \times (n+1)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Ce qui établit l'hérédité et achève cette récurrence. On en déduit en particulier que : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n!$.

En conjuguant ce résultat avec la formule de Taylor, on en déduit que :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1-x} = \left[\sum_{k=0}^n x^k \right] + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

Par changement de variable $x \mapsto (-x^2)$: $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} \right] + o(x^{2n})$

Par "primitivation" (et en notant que $\arctan(0) = 0$) :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \arctan(x) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right] + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

QUESTION DE COURS 5 — Théorème (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG) : si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$, alors f admet un DL à l'ordre n en a , explicitement :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] + o_a((x-a)^n)$$

PREUVE. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n) : f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \implies \forall x \in I, f(x) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] + o_a((x-a)^n)$

► Initialisation (pour $n = 0$) : supposons que $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que f est continue sur I . Pour tout réel a de I , on peut judicieusement écrire :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \underbrace{(f(x) - f(a))}_{\varepsilon(x)}$$

On pose : $\varepsilon(x) = (f(x) - f(a))$. Comme f est continue en a par hypothèse, on a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. D'où : $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. On a donc obtenu, sous l'hypothèse que $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$:

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0, \text{ c\`ad : } \forall x \in I, f(x) = f(a) + o_a(1) \quad \text{D'o\`u } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

► **Hérédité** : supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Sous cette hypothèse on a : $f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. On peut alors légitimement appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction f' pour affirmer que pour tout réel $a \in I$:

$$\forall t \in I, f'(t) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] + o_a((t-a)^n)$$

Puis, pour un réel x de I , on intègre cette relation entre a et x pour obtenir (par linéarité de l'intégrale) :

$$\forall x \in I, \int_a^x f'(t) dt = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} \int_a^x (t-a)^k dt \right] + \int_a^x o_a((t-a)^n) dt$$

Soit :

$$\forall x \in I, f(x) - f(a) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} \right] + \int_a^x o_a((t-a)^n) dt$$

$$\text{D'o\`u : } \forall x \in I, f(x) = f(a) + \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} \right] + \int_a^x o_a((t-a)^n) dt$$

Et finalement :

$$\forall x \in I, f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] + \underbrace{\int_a^x o_a((t-a)^n) dt}_{=o_a((x-a)^{n+1})}$$

Récurrence établie (au “point de détail” ci-dessous près).

— FIN DE LA QUESTION DE COURS[†] —

Pour information, preuve de la partie admise. Pour achever la preuve, il “suffit” donc de montrer que le terme $\int_a^x o_a((t-a)^n) dt$ est négligeable devant $(x-a)^{n+1}$ au voisinage de a , c'est-à-dire qu'on peut l'écrire comme $(x-a)^{n+1} \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$.

On commence par noter que : $o_a((t-a)^n) = (t-a)^n \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$ (définition de négligeabilité).

$$\text{Puis on observe que pour tout réel } x \neq a : \int_a^x o_a((t-a)^n) dt = (x-a)^{n+1} \times \frac{\int_a^x (t-a)^n \varepsilon(t) dt}{(x-a)^{n+1}}.$$

Posons alors : $\varphi(x) = \frac{\int_a^x (t-a)^n \varepsilon(t) dt}{(x-a)^{n+1}}$, et montrons que $\varphi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a , ce que l'on fait en revenant à la définition de limite.

Fixons $\beta > 0$. Puisque $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$, il existe un réel α tel que $|t-a| < \alpha \implies |\varepsilon(t)| < \beta$. Ainsi :

$$|x-a| < \alpha \implies |\varphi(x)| < \frac{1}{|x-a|^{n+1}} \times \beta \int_a^x |t-a|^n dt \quad \text{d'o\`u} \quad |x-a| < \alpha \implies |\varphi(x)| < \frac{\beta}{n+1}.$$

En particulier : $|x-a| < \alpha \implies |\varphi(x)| < \beta$, et on a donc établi que : $\forall \beta > 0, \exists \alpha > 0, |x-a| < \alpha \implies |\varphi(x)| < \beta$.

Ce qui signifie que $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, et donc : $\int_a^x o_a((t-a)^n) dt = o_a((x-a)^{n+1})$.

Finalement, on a : $\forall x \in I, f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] + o_a((x-a)^{n+1})$, ce qui prouve que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, montre l'hérédité de la propriété, et conclut cette preuve.

†. On admet donc que : $\int_a^x o_a((t-a)^n) dt = o_a((x-a)^{n+1})$

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1 — Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$.

EXERCICE 2 — Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g : x \mapsto \ln(\cos(x))$.

EXERCICE 3 — Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$.

EXERCICE 4 — Calculs de $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ et $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

EXERCICE 5 — Equation de l'asymptote D à la courbe représentative de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ au voisinage de $+\infty$, et position relative de $\mathcal{C}_f$ et D .

EXERCICE 6 — Calcul de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x - a)}$ avec a réel.

EXERCICE 7 — On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à 2. Explicitement :

$$\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}^2]-1, 1[, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ f &\longmapsto P_f \end{aligned}$$

où P_f désigne la partie régulière du DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction f .

Par exemple : $\varphi(\exp) = 1 + X + \frac{X^2}{2}$; $\varphi(\sin) = X$; $\varphi(\cos) = 1 - \frac{X^2}{2}$

Montrer que l'application φ est surjective et non-injective.

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1 — Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$.

ATTENTION : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} \neq 0!$... Ceci dit, selon le cours, on a : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

Ainsi :

$$e^{\sqrt{1+x}} = e^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)} = e \times e^{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} = 0$, on en déduit que :

$$e^{\sqrt{1+x}} = e \times \left[1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2}{2!} + o(x^2) \right] = e \times \left[1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right]$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{\sqrt{1+x}} = e + \frac{ex}{2} + o(x^2)$

EXERCICE 2 — Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g : x \mapsto \ln(\cos(x))$.

Soit $x \in I =]-1, 1[$.[‡]

Selon le cours : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.

D'où : $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$ (♠).

Par ailleurs : $\ln(1 - X) = -X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$.

En posant $X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ dans la relation (♠), on obtient :

$$\ln(\cos(x)) = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2}{2} + o(x^4)$$

Ainsi :

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

Conclusion. $\forall x \in I, \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

EXERCICE 3 — Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$.

Ecrivons un DL à l'ordre 4 en 0 de $\sin^2(x)$.

D'après le cours : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Par suite : $\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$.

On en déduit que : $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \right]$ (♠)

Par ailleurs, d'après le cours encore : $\frac{1}{1-X} = 1 + X + o(X)$.

On en déduit que : $\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$. D'où : $1 - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = -\frac{x^2}{3} + o(x^2)$ (♣).

D'après (♠) et (♣) : $\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} \right] \sim_0 \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{x^2}{3} \right)$. **Conclusion.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{3}$

[‡]. Pour s'assurer que le réel $\ln(\cos(x))$ est bien défini.

EXERCICE 4 — Calculs de $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ et $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}; \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})} \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n} \ln(1 + \frac{1}{n})}$$

Or : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$. On en déduit que :

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1; \quad n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} n \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

Conclusion. $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$ et $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = 1$

EXERCICE 5 — Equation de l'asymptote D à la courbe représentative de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ au voisinage de $+\infty$, et position relative de $\mathcal{C}_f$ et D .

Soit x un réel strictement positif. On a : $\sqrt{x^2 + x + 1} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

Par ailleurs, pour tout réel $X > -1$, on a : $\sqrt{1 + X} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o(X^2)$.

On pose : $X = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ (et on peut observer que X tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$).

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} &= x \left[1 + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2} - \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2}{8} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = x \left[1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= x \left[1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Conclusion. La courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$; et que la courbe est située au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ (signe de $\frac{3}{8x}$).

EXERCICE 6 — Calcul de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x - a)}$ avec a réel.

On effectue un **retour à l'origine**, c'est-à-dire un changement de variable permettant de se ramener à un calcul de limite en 0, en posant :

$$X = x - a \quad (\text{donc } x = X + a)$$

Moyennant ce changement de variable, l'énoncé devient :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x - a)} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(X + a) - \sin(a)}{\sin(X)}$$

Déterminons un équivalent en 0 de cette expression. On a déjà : $\sin(X) \sim_0 X$ (♠)

Par ailleurs :

$$\sin(X + a) - \sin(a) = \sin(X) \cos(a) + \sin(a) \cos(X) - \sin(a) = \sin(X) \cos(a) + \sin(a) (\cos(X) - 1)$$

Donc : $\sin(X + a) - \sin(a) = \cos(a)X + o(X)$ d'où : $\sin(X + a) - \sin(a) \sim_0 \cos(a)X$ (♣).

D'après (♠) et (♣) : $\frac{\sin(X + a) - \sin(a)}{\sin(X)} \sim_0 \cos(a)$. **Conclusion.** $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x - a)} = \cos(a)$

EXERCICE 7 — On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à 2. Explicitement :

$$\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}^2(]-1, 1[, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ f &\longmapsto P_f \end{aligned}$$

où P_f désigne la partie régulière du DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction f .

Par exemple : $\varphi(\exp) = 1 + X + \frac{X^2}{2}$; $\varphi(\sin) = X$; $\varphi(\cos) = 1 - \frac{X^2}{2}$

Montrer que l'application φ est surjective et non-injective.

► **Surjectivité.** Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On définit une fonction f en posant : $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = ax^2 + bx + c$.

On a : $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = c + bx + ax^2 + o(x^2)$. D'où : $\varphi(f) = P$.

On en déduit que tout élément P de $\mathbb{R}_2[X]$ admet un antécédent par φ : l'application φ est surjective.

► **(Non-)injectivité.** Selon le cours : $\varphi(\sin) = \varphi(\tan) = X$. D'où φ n'est pas injective.

Conclusion. L'application φ est surjective et non-injective.