

Chapitre 18 : Analyse asymptotique

1 – Négligeabilité

2 – Domination

3 – Equivalents

4 – Développements limités

A – Généralités

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert non-vide, soit $a \in I$ et soit n un entier naturel. La fonction f admet un **développement limité à l'ordre n au voisinage de a** s'il existe $(n+1)$ scalaires $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = \left[\sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k \right] + o((x-a)^n)$$

Propriété. Si f admet un DL à l'ordre n en a , il est unique.

B – Construction

Théorème (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG) : si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$, alors f admet un DL à l'ordre n en a , explicitement :

$$\forall x \in I, f(x) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] + o((x-a)^n)$$

En particulier lorsque $a = 0$:

$$\forall x \in I, f(x) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] + o(x^n)$$

Application : début du formulaire des DL usuels (exp, cos, sin, ch, sh, $1/(1-x)$, $(1+x)^\alpha$).

C – DL et opérations algébriques

Règles donnant le DL d'une somme, d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'une composée et d'une primitive.

Application : fin du formulaire des DL usuels ($\ln(1+x)$, arctan, arccos, arcsin).

D – Quelques applications des DL

Calculs de limites, d'équivalents, de tangentes (et positions relatives locales), d'asymptotes (et positions relatives locales).

A CONNAÎTRE SANS FAUTE À PARTIR DU 23 MARS 2026

Développements limités sous forme de Σ de $\frac{1}{1-x}$, e^x , $\text{ch}(x)$, $\text{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\frac{1}{1+x}$ et $\arctan(x)$

Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1+x)^\alpha$: $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2)$

QUESTIONS DE COURS

- **Propriété.** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. Si f est paire (*resp.* impaire), alors les termes de degrés impairs (*resp.* pairs) de la partie régulière de son DL à l'ordre n en 0 sont nuls.
- **Application de la formule de Taylor 1.** DL en 0 à l'ordre $2n$ de $\cos$.
- **Application de la formule de Taylor 2.** DL en 0 à l'ordre $2n + 1$ de $\sin$.
- **Application de la formule de Taylor 3.** DL en 0 à l'ordre n de $f : x \mapsto 1/(1 - x)$. Conséquence : DL en 0 à l'ordre $(2n + 1)$ de la fonction arctangente.
- Sur le principe du volontariat : **Formule de Taylor-Young.**

(en admettant : “ $\int_a^x o_a((t - a)^n) dt = o_a((x - a)^{n+1})$ ”).