MPSI – Colle 22 (30 mars au 3 avril 2026) : Polynômes - DL

Chapitre 18 : DL - Révisions : formulaire + calcul "simple"

Aucune autre question spécifique sur ce thème n'est attendue lors cette colle : pas de calcul de PGCD, de PPCM, de coefficients de Bezout...

Chapitre 19 : Polynômes

1 – Généralités

2 – Degré, coefficient dominant

3 – Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Seulement : relation de divisibilité, polynômes associés, théorème de la division euclidienne.

4 – Fonctions polynomiales

a – Racines d'un polynôme

Application à la factorisation. Majoration du nombre de racines par le degré. Polynômes interpolateurs de Lagrange.

b – Dérivation formelle dans $\mathbb{K}[X]$

Définition. Formules de Leibniz et de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$.

Questions de cours

- **Propriété**. $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2,\ \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- **Propriété**. $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,
$$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)).$$
- **Propriété**. Deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont associés SSI il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

  ET Conséquence : deux polynômes associés ont même degré.
- **Propriété**. L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est intègre, et $\mathbb{K}[X]^* = \mathbb{K}^*$ (ce n'est pas un corps).
- **Lemme**. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, le reste dans la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$ est $P(\alpha)$.

  ET Conséquence : α est racine de P SSI $(X - \alpha)$ divise P.
- **Théorème (nombre maximal de racines d'un polynôme)** : si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $(n+1)$ racines distinctes, alors $P = \tilde{0}$

  ET Corollaire (principe du prolongement algébrique) : soient P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$. S'il existe $(n+1)$ scalaires (càd des éléments de $\mathbb{K}$) $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ 2 à 2 distincts tels que : $\forall\ i \in [\![0, n]\!]$, $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.