Colle 24 – Questions de cours

Question de cours 1 — **Propriété**. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors : $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$.

Preuve. D'une part : $f\left(\overrightarrow{0}_E + \overrightarrow{0}_E\right) = f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$. D'autre part : $f\left(\overrightarrow{0}_E + \overrightarrow{0}_E\right) = f\left(\overrightarrow{0}_E\right) + f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$ (f étant linéaire)

On en déduit que : $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) + f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$, puis la conclusion.

Conclusion. $[f \in \mathscr{L}(E,F)] \Longrightarrow \left[f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F\right]$

Question de cours 2 — **Propriété** : si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\ker f$ est un sev de E et $\mathrm{Im}\ f$ est un sev de F.

Preuve. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
Montrons que $\ker f$ est un sev de E. Par définition, $\ker f$ est une partie de E (SEV1). Le vecteur nul y appartient (SEV2), puisque $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$ pour toute $f \in \mathscr{L}(E,F)$ (QC1).

Il reste à établir que $\ker f$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\ker f$, et λ et μ deux scalaires.
Alors : $f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{0_F} + \mu\overrightarrow{0_F} = \overrightarrow{0_F}$; la première égalité provenant de la définition d'application linéaire, et la seconde du fait que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans le noyau de f par hypothèse.
Par conséquent : $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in \ker f$, et $\ker f$ est donc stable par combinaison linéaire.

Conclusion 1. $\ker f$ est une partie de E, contenant $\overrightarrow{0}_E$, et stable par combinaison linéaire. Par suite, $\ker f$ est un sev de E.

Montrons que $\mathrm{Im} f$ est un sev de F. Par définition, $\mathrm{Im} f$ est une partie de F (SEV1). Le vecteur nul (de F) y appartient (SEV2), puisque $\overrightarrow{0_F} = f\left(\overrightarrow{0_E}\right)$ pour toute $f \in \mathscr{L}(E,F)$ (QC2 encore).

Il reste à établir que $\mathrm{Im} f$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\mathrm{Im} f$, et λ et μ deux scalaires.
Par hypothèse, il existe deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de E tels que $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{u}$ et $f\left(\overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{v}$. Par conséquent :
$f\left(\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}\right) = \lambda f(\overrightarrow{a}) + \mu f\left(\overrightarrow{b}\right) = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$; la première égalité provenant de la définition d'application linéaire, et la seconde des définitions respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Il s'ensuit que $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im} f$ (puisqu'il admet pour antécédent $\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$). Ainsi $\mathrm{Im} f$ est stable par combinaison linéaire (SEV3).

Conclusion 2. $\mathrm{Im} f$ est une partie de F, contenant $\overrightarrow{0}_F$, et stable par combinaison linéaire. Par suite, $\mathrm{Im} f$ est un sev de F.

Question de cours 3 — **Théorème**. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors : f est injective SSI $\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.

Preuve. On raisonne par double implication, pour faire preuve d'originalité.

➤ Supposons f injective. On a déjà $\left\{\overrightarrow{0}_E\right\} \subset \ker\ f$ puisque $\ker\ f$ est un sev de E. Réciproquement, soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\ker\ f$. Alors $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}_F$. Comme par ailleurs f est linéaire, on a aussi : $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$. Donc $f(\overrightarrow{v}) = f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$, et on en déduit $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}_E$ par injectivité de f. Ce qui assure que $\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.

En résumé : $[f \text{ injective}] \Longrightarrow \left[\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}\right]$.

➤ Réciproquement, supposons $\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$. Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs de E tels que $f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{w})$. Alors : $f(\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}_F$, d'où par linéarité de f : $f(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}_F$. Par suite, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \in \ker\ f$, et puisque le noyau de f est réduit au vecteur nul par hypothèse, on en déduit que $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}_E$, d'où : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

On a ainsi établi que $[f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{w})] \Longrightarrow [\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}]$, ce qui prouve l'injectivité de f.

Par suite : $\left[\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}\right] \Longrightarrow [f \text{ injective}]$.

Conclusion. $\left[\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}\right] \Longleftrightarrow [f \text{ injective}]$

Question de cours 4 — **Propriété** : soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe une famille $(\overrightarrow{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ génératrice de E, càd une famille de vecteurs de E tels que $E = \text{Vect}\left((\overrightarrow{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$. Alors :

$$\text{Im}f = \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$$

Preuve. ➤ Montrons l'inclusion : $\text{Im}f \subset \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$. Soit $\overrightarrow{V} \in \text{Im}f$. Il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E tel que : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{V}$.

Puisque la famille $(\overrightarrow{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est génératrice de E : $\exists\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \overrightarrow{u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v}_i$.

Ainsi : $\overrightarrow{V} = f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v}_i\right)$ et par linéarité de f : $\overrightarrow{V} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\overrightarrow{v}_i)$, d'où : $\overrightarrow{V} \in \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$.

$\boxed{\underline{\text{Conclusion 1}} : \text{Im}f \subset \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)}$

➤ Montrons l'inclusion : $\text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right) \subset \text{Im}f$. Soit $\overrightarrow{V} \in \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$.

Alors : $\exists\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \overrightarrow{V} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\overrightarrow{v}_i)$.

Par linéarité de f, on a : $\overrightarrow{V} = f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v}_i\right)$, d'où $\overrightarrow{V} \in \text{Im}f$. $\boxed{\underline{\text{Conclusion 2}} : \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right) \subset \text{Im}f}$

Bilan. $\text{Im}f = \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$

Question de cours 5 — **Propriété (caractérisation des sev supplémentaires)** : deux sev F et G de E sont supplémentaires SSI $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $E = F + G$.

Preuve. ➤ Sens direct : supposons que F et G sont supplémentaires dans E (càd $E = F \bigoplus G$). En particulier, on a déjà $E = F + G$.

Montrons que $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Soit $\overrightarrow{v} \in F \cap G$. Alors le vecteur $\overrightarrow{v}$ peut s'écrire $\overrightarrow{v} = \underbrace{\overrightarrow{v}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in G}$ et $\overrightarrow{v} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{v}}_{\in G}$. Les sev F et G étant supplémentaires dans E, on en déduit que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Par conséquent : $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. $\boxed{\underline{\text{Conclusion 1}} : [E = F \bigoplus G] \Longrightarrow \left[F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \text{ et } E = F + G\right]\ (\spadesuit)}$.

➤ Réciproquement : supposons que $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $E = F + G$, et considérons un vecteur arbitraire $\overrightarrow{v}$ de E. La seconde hypothèse permet d'affirmer qu'il existe $\overrightarrow{f} \in F$ et $\overrightarrow{g} \in G$ tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.

Il reste à établir l'unicité de cette écriture. Supposons qu'il existe $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{f'}$ dans F, et $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{g'}$ dans G tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f'} + \overrightarrow{g'}$. Alors : $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{f'} = \overrightarrow{g'} - \overrightarrow{g}$. On en déduit que $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{f'} \in F \cap G$. Par hypothèse, ceci implique que : $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{f'} = \overrightarrow{0}$. D'où $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f'}$ et donc $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g'}$.

Par suite : $\forall\, \overrightarrow{v} \in E, \quad \exists! \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$. Autrement dit : $E = F \bigoplus G$.

Conclusion 2 : $\left[F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \text{ et } E = F + G\right] \Longrightarrow \left[E = F \bigoplus G\right]$ ($\clubsuit$).

Synthèse. D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : $\left[F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \text{ et } E = F + G\right] \Longleftrightarrow \left[E = F \bigoplus G\right]$

Question de cours 6 — **Propriété** : soit E un $\mathbb{K}$-ev. $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Preuve. Il s'agit de montrer que la composition des applications (la loi "$\circ$") est une loi de composition interne dans $\mathrm{GL}(E)$, associative, possédant un élément neutre, et telle que tout élément de $\mathrm{GL}(E)$ possède un inverse dans $\mathrm{GL}(E)$.

Point 1 - la loi "$\circ$" est une LCI dans GL(E).

Soient f et g deux éléments de $\mathrm{GL}(E)$. La composée $g \circ f$ est une application de E dans E linéaire (car f et g le sont), et bijective (car f et g le sont). Donc $g \circ f$ est une application linéaire et bijective de E dans E : c'est un automorphisme de E.

En résumé : $[f \in \mathrm{GL}(E) \text{ et } g \in \mathrm{GL}(E)] \Longrightarrow [(g \circ f) \in \mathrm{GL}(E)]$. La loi "$\circ$" est une LCI dans $\mathrm{GL}(E)$.

Point 2 - Associativité.

La loi "$\circ$" est associative dans $\mathrm{GL}(E)$, car la composition des applications en général l'est. *

Point 3 - Elément neutre. $\mathrm{id}_E \in \mathrm{GL}(E)$ (et id_E est l'élément neutre pour la composition)

Point 4 - Inversibilité dans GL(E).

Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. L'application f est en particulier une bijection de E dans E : à ce titre, elle admet une bijection réciproque f^{-1} (de E dans E aussi...).

Il reste à prouver que f^{-1} est linéaire. A cette fin, considérons $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a d'une part :

$$f\left(f^{-1}\left(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\right)\right) = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \text{ (puisque } f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E)$$

Et d'autre part :

$$f\left(\lambda f^{-1}(\overrightarrow{u}) + \mu f^{-1}(\overrightarrow{v})\right) = \lambda f\left(f^{-1}(\overrightarrow{u})\right) + \mu f\left(f^{-1}(\overrightarrow{u})\right) = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$$

la première égalité provenant de la linéarité de f, et la seconde de la relation $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E$.

On en déduit que : $f\left(f^{-1}\left(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\right)\right) = f\left(\lambda f^{-1}(\overrightarrow{u}) + \mu f^{-1}(\overrightarrow{v})\right)$

L'application f étant injective (car bijective), on en déduit que : $f^{-1}\left(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\right) = \lambda f^{-1}(\overrightarrow{u}) + \mu f^{-1}(\overrightarrow{v})$.

Ce qui prouve la linéarité de f^{-1}. En résumé : $[f \in \mathrm{GL}(E)] \Longrightarrow \left[f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)\right]$.

Conclusion. On déduit des 4 points précédents que $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe

---

*. Pour mémoire, ceci signifie que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, ce que l'on prouve en écrivant brillamment que pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E on a : $(h \circ (g \circ f))(\overrightarrow{v}) = h(g(f(\overrightarrow{v}))) = ((h \circ g) \circ f)(\overrightarrow{v})$

Méthodes essentielles du chapitre 20

1. Montrer que "quelquechose" est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E :

  a. En utilisant les axiomes "(SEVx)" (exo 1 de la banque)

  b. En utilisant "un Vect" (exo 2 de la banque)

  c. En utilisant "un ker" (exo 3 de la banque)

2. Déterminer une famille génératrice d'un sev (répétition du point 1.b, exo 4 de la banque)

3. Montrer qu'une application est linéaire (ou est un endomorphisme) (exo 5 de la banque)

4. Déterminer le noyau d'une application linéaire (résolution de $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$, exo 6 de la banque)

5. Déterminer l'image d'une application linéaire

(en utilisant : $f\left(\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(f(\overrightarrow{v}_1), \ldots, f(\overrightarrow{v}_n)\right)$, exo 7 de la banque)

6. Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme/automorphisme (exo 8 de la banque)

7. Montrer que deux sev sont supplémentaires dans un ev E (exo 9 de la banque)

Banque d'exercices

Exercice 1 — On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes.

Montrer que $F = \left\{ f \in E, \quad \displaystyle\int_0^1 f = 0 \right\}$ est un sev de E.

Exercice 2 — Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on considère l'ensemble F des polynômes admettant (-2) comme racine de multiplicité au moins égale à 3.

Montrer que F est un sev de E.

Exercice 3 — Soit $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $A \in E$.

On considère l'ensemble F des matrices de E commutant avec A, càd : $F = \mathrm{COM}(A) = \{M \in E, \ MA = AM\}$.

Montrer que F est un sev de E.

Exercice 4 — On pose $E = \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Soit F l'ensemble des matrices de E telles que la somme des coefficients de la deuxième ligne soit égale au double de la somme des coefficients de la première ligne.

Montrer que F est un sev de E, et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 5 — Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - X^2P'' \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 — Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et soit $\omega \in R_+^*$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & y'' + \omega^2 y \end{array}$$

On admet que f est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau.

Exercice 7 — On considère l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M - M^T \end{array}$

On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$. Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 8 — On considère l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M - \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{I}_2 \end{array}$

On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 9 — Dans $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les sev $F = \{f \in E, \ f(0) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\cos)$.

Etablir que : $E = F \bigoplus G$.

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1 — On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes.

Montrer que $F = \left\{ f \in E, \quad \int_0^1 f = 0 \right\}$ est un sev de E.

D'après l'énoncé F est une partie de E (SEV1), et la fonction identiquement nulle sur $[0,1]$ (qui est $\overrightarrow{0}_E$) appartient clairement à F (SEV2).

Soient f et g dans F, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Par linéarité de l'intégrale et par hypothèse : $\displaystyle\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g = 0$. D'où : $(\lambda f + \mu g) \in F$.

On a ainsi prouvé que : $[f \in F \text{ et } g \in F] \Longrightarrow \left[\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2,\ \lambda f + \mu g \in F\right]$

Ce qui signifie que F est stable par combinaison linéaire (SEV3).

Conclusion. F est une partie de E (SEV1), qui contient le vecteur nul de E (SEV2), et qui est stable par combinaison linéaire (SEV3). Donc F est un sev de E.

Exercice 2 — Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on considère l'ensemble F des polynômes admettant (-2) comme racine de multiplicité au moins égale à 3.

Montrer que F est un sev de E.

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{R}_5[X]$: $\forall P \in \mathbb{R}_5[X],\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{P^{(k)}(-2)}{k!} (X+2)^k$

Par ailleurs, d'après le cours : (-2) est racine de P de multiplicité au moins égale à 3 SSI $P(-2) = P'(-2) = P''(-2) = 0$.

Il s'ensuit que P appartient à F SSI il existe 3 réels a, b et c tels que : $P = a(X+2)^3 + b(X+2)^4 + c(X+2)^5$

Conclusion. $F = \text{Vect}\left((X+2)^3, (X+2)^4, (X+2)^5\right)$

Exercice 3 — Soit $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $A \in E$.

On considère l'ensemble F des matrices de E commutant avec A, càd : $F = \mathrm{COM}(A) = \{M \in E,\ MA = AM\}$.

Montrer que F est un sev de E.

Observons que : $MA = AM \Longleftrightarrow MA - AM = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$.

Cette remarquable observation nous conduit à introduire l'application : $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array}$

Soient $(M,N) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$f(\lambda M + \mu N) = (\lambda M + \mu N)A - A(\lambda M + \mu N) = \lambda MA + \mu NA - \lambda AM - \mu AN = \lambda(MA - AM) + \mu(NA - AN)$

Finalement : $f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$. Ce qui prouve la linéarité de f.

Cette vérification faite, il est clair que : $\ker f = F$.

Conclusion. F est un sev, en tant que noyau d'une application linéaire.

Exercice 4 — On pose $E = \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Soit F l'ensemble des matrices de E telles que la somme des coefficients de la deuxième ligne soit égale au double de la somme des coefficients de la première ligne.

Montrer que F est un sev de E, et en déterminer une famille génératrice.

Soit $M \in E$. Par un calcul aisé : $M \in F \Longleftrightarrow \exists\,(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5,\ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 2\,(a+b+c)-d-e \end{pmatrix}$

D'où : $M \in F \Longleftrightarrow \exists\,(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5,\ M = a(\mathrm{E}_{11}+2\mathrm{E}_{23})+b(\mathrm{E}_{12}+2\mathrm{E}_{23})+c(\mathrm{E}_{13}+2\mathrm{E}_{23})+d(\mathrm{E}_{21}-\mathrm{E}_{23})+e(\mathrm{E}_{22}-\mathrm{E}_{23})$

Conclusion. $F = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{E}_{11}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{12}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{13}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{21}-\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{22}-\mathrm{E}_{23})$

F est un sev de $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, et $\mathscr{F} = \{\mathrm{E}_{11}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{12}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{13}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{21}-\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{22}-\mathrm{E}_{23}\}$ est une famille génératrice de F.

Exercice 5 — Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - X^2P'' \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, λ et μ deux réels. On a :

$$f(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P+\mu Q) - X^2(\lambda P+\mu Q)'' = \lambda P + \mu Q - \lambda X^2P'' - \mu X^2 Q''$$

(essentiellement par linéarité de la dérivation).

Donc : $f(\lambda P+\mu Q) = \lambda(P - X^2P'') + \mu(Q - X^2Q'') = \lambda f(P) + \mu f(Q)$

En résumé, on a établi que : $\forall\,(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ f(\lambda P+\mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$

Conclusion. L'application f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$; c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 — Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et soit $\omega \in R_+^*$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & y'' + \omega^2 y \end{array}$$

On admet que f est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau.

Le noyau de f est par définition :

$$\ker(f) = \left\{g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(g) = 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) = \left\{g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ g'' + \omega^2 g = 0\right\}$$

Déterminer $\ker(f)$ revient donc à résoudre l'équation différentielle $g'' + \omega^2 g = 0$.

Or la solution générale de cette EDL2 archi-célèbre est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$$

Notons, pour tout réel t : $f_1(t) = \cos(\omega t)$ et $f_2(t) = \sin(\omega t)$.

Avec ces notations : $g \in \ker f \Longleftrightarrow g'' + \omega^2 g = 0 \Longleftrightarrow \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ g = \lambda f_1 + \mu f_2 \Longleftrightarrow g \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$

Conclusion. $\ker(f) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$

Exercice 7 — On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M - M^T \end{array}$

On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$. Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$.

D'après le cours : $\mathrm{M}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

D'où, d'après le cours : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$

Des calculs sans difficultés donnent :

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}, E_{12} - E_{21}, E_{21} - E_{12}, 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}) \qquad \text{Par suite : } \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(E_{12} - E_{21})$$

Or $\mathrm{Vect}(E_{12} - E_{21}) = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$, puisqu'une matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ est antisymétrique SSI il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $M = \lambda(E_{12} - E_{21})$.

Conclusion. $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(E_{12} - E_{21}) = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$

Exercice 8 — On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M - \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{I}_2 \end{array}$

On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Puisque l'on admet que f est linéaire, il suffit de prouver que f est bijective.

➤ **Injectivité de** f. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. On a :

$$M \in \ker f \iff f(M) = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})} \iff M - \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{I}_2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})} \iff M = \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{I}_2$$
$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \iff a = b = c = d = 0$$

En résumé : $M \in \ker f \iff M = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}$. D'où : $\ker f = \left\{0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\right\}$. Donc f est injective (♠).

➤ **Surjectivité de** f. D'après le cours : $\mathrm{M}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

D'où, d'après le cours : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$

Des calculs sans difficultés donnent :

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(-E_{22}, E_{12}, E_{21}, -E_{11}) = \mathrm{Vect}(E_{22}, E_{12}, E_{21}, E_{11}) = \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \quad \text{Donc } f \text{ est surjective.}$$

Conclusion. f est un endomorphisme bijectif de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. C'est donc un automorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 9 — Dans $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les sev $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\cos)$. Etablir que : $E = F \bigoplus G$.

Soit $\varphi \in F \cap G$. Alors : $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi = \lambda \cos$. Puisque $\varphi \in F$, on en déduit $\lambda = 0$, d'où $\varphi = \overrightarrow{0}_E$. Par suite : $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.

Montrons que $E = F + G$ par analyse-synthèse.

Soit $\varphi \in E$. En s'inspirant de l'exemple fait en cours (avec "exp" à la place de "cos"), on obtient la décomposition : $\varphi = \underbrace{(\varphi - \varphi(0)\cos)}_{\in F} + \underbrace{\varphi(0)\cos}_{\in G}$. †

Conclusion. $E = F \bigoplus G$

†. Cette partie est naturellement à détailler en colle.