Colle 25 – Questions de cours

Question de cours 1 — Propriétés (des projections) : soient F et G deux sev supplémentaires de E. On note p_F la projection sur F parallèlement à G. Alors p_F est un endomorphisme de E tel que $p_F^2 = p_F$. En outre : $\ker(p_F) = G$ et $\mathrm{Im}(p_F) = F$.

Preuve. Soient F et G deux sev supplémentaires de E (càd tels que $E = F \bigoplus G$). Par définition (de sev supplémentaires) : $\forall \overrightarrow{v} \in E, \quad \exists! \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$. On rappelle alors que la projection sur F parallèlement à G est l'application p_F de E dans E définie en posant $p_F(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}$.

➤ Montrons la linéarité de p_F. Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs de E, et soient λ et μ deux scalaires. Puisque $E = F \bigoplus G$, il existe deux vecteurs $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{f'}$ dans F, et deux vecteurs $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{g'}$ dans G tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{f'} + \overrightarrow{g'}$. Notons déjà que : $\overrightarrow{f} = p_F(\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{f'} = p_F(\overrightarrow{w})$ ($\sharp$).

En outre : $\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w} = \underbrace{\lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{f'}}_{\in F} + \underbrace{\lambda\overrightarrow{g} + \mu\overrightarrow{g'}}_{\in G}$. D'où : $p_F(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{f'}$ ($\flat$).

On déduit de ($\flat$) et de ($\sharp$) que : $p_F(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda p_F(\overrightarrow{v}) + \mu p_F(\overrightarrow{w})$. Ce qui prouve que p_F est linéaire. $\boxed{\text{D'où } p_F \in \mathscr{L}(E)}$

➤ Montrons que $p_F^2 = p_F$. Avec les notations précédemment introduites : $p_F(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}$.
Et puisque $\overrightarrow{f} = \underbrace{\overrightarrow{f}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{0}_E}_{\in G}$, on a : $p_F^2(\overrightarrow{v}) = p_F(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f}$. Il s'ensuit que : $\forall \overrightarrow{v} \in E,\ p_F^2(\overrightarrow{v}) = p_F(\overrightarrow{v})$.

Donc : $\boxed{p_F^2 = p_F}$.

Question de cours 2 — Propriété. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. On a :

$$(p \text{ est un projecteur de } E) \Longrightarrow \left(E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)\right)$$

Preuve. Supposons que p est un projecteur de E.

Montrons que $\ker(p) \cap \ker(\mathrm{id}_E - p) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.

Supposons que $\overrightarrow{w} \in \ker(p) \cap \ker(\mathrm{id}_E - p)$, alors $p(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}_E$ (puisque $\overrightarrow{w} \in \ker(p)$) et $p(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}$ (puisque $\overrightarrow{w} \in \ker(\mathrm{id}_E - p)$). D'où $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}_E$. Il s'ensuit que : $\ker(p) \cap \ker(\mathrm{id}_E - p) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$ ($\flat$).

Montrons que $E = \ker(p) + \ker(\mathrm{id}_E - p)$ par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Supposons qu'il existe $\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in \ker(p) \times \ker(\mathrm{id}_E - p)$ tel que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.

Alors : $p(\overrightarrow{v}) = p\left(\overrightarrow{f}\right) + p(\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{0}_E + \overrightarrow{g}$ (la première égalité provenant de la linéarité de p, et la seconde des hypothèses faites sur $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$).

Ainsi : $\overrightarrow{g} = p(\overrightarrow{v})$. Il s'ensuit que : $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v})$.

Synthèse. Soit $\overrightarrow{v} \in E$. On écrit judicieusement : $\overrightarrow{v} = \underbrace{(\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v}))}_{\overrightarrow{f}} + \underbrace{p(\overrightarrow{v})}_{\overrightarrow{g}}$

Avec ces notations, on a :

- ➢ $p\left(\overrightarrow{f}\right) = p(\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v})) = p(\overrightarrow{v}) - p^2(\overrightarrow{v}) = p(\overrightarrow{v}) - p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.* D'où : $\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v}) \in \ker(p)$ ($\heartsuit$).
- ➢ $p(\overrightarrow{g}) = p(p(\overrightarrow{v})) = p(\overrightarrow{v})$ (puisque p est un projecteur). D'où $p(\overrightarrow{v}) \in \ker(\mathrm{id}_E - p)$ ($\clubsuit$).

*. La première égalité provenant de la linéarité de p, et la seconde de l'hypothèse selon laquelle p est un projecteur.

➢ Enfin, il est immédiat que $\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v})) + p(\overrightarrow{v})$ ($\spadesuit$)

On déduit de ($\spadesuit$), ($\heartsuit$) et ($\clubsuit$) que : $E = \ker(p) + \ker(\mathrm{id}_E - p)$ ($\diamondsuit$).

D'après ($\diamondsuit$) et ($\flat$) : $E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$.

Conclusion. (p est un projecteur de E) $\Longrightarrow$ ($E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$)

Remarque. La réciproque de l'implication précédente est vraie, mais elle n'est pas exigible lors de cette colle.

➤ *Réciproquement, montrons que : ($E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$) $\Longrightarrow$ (p est un projecteur de E).*

Soit $\overrightarrow{v}$ un élément de E. Par hypothèse : $\exists!\ \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in \ker(p) \times \ker(\mathrm{id}_E - p)$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.

Muni des hypothèses faites sur $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$, on effectue sans difficulté les calculs suivants.

D'abord : $p(\overrightarrow{v}) = p\left(\overrightarrow{f}\right) + p(\overrightarrow{g})$, d'où : $p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{g}$.

Puis : $p^2(\overrightarrow{v}) = p(\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{g}$, càd : $p^2(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{g}$.

Par conséquent : $\forall \overrightarrow{v} \in E$, $p^2(\overrightarrow{v}) = p(\overrightarrow{v})$. Donc : $p^2 = p$, ce qui signifie que l'endomorphisme p est un projecteur.

Conclusion 2. ($E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$) $\Longrightarrow$ (*p est un projecteur de E*)

Bilan. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. On a : (p est un projecteur de E) $\Longleftrightarrow$ ($E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$)

Question de cours 3 — Propriété (partie entière, partie polaire) : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple (E, G) avec $E \in \mathbb{K}[X]$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ de degré < 0 tel que : $F = E + G$.

Preuve. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (E, R) tel que : $P = EQ + R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$.

On en déduit : $F = E + \dfrac{R}{Q}$. En posant $G = R/Q$, on a établi l'existence d'un couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que : $F = E + G$. En outre, puisque $\deg(R) < \deg(Q)$, on a : $\deg(G) < 0$.

Etablissons son unicité. Supposons qu'il existe un autre couple (E_1, G_1) satisfaisant les mêmes conditions. Alors en particulier : $E - E_1 = G_1 - G$.

Supposons que $E - E_1 \neq 0$. Alors $\deg(E - E_1) \geqslant 0$ tandis que $\deg(G_1 - G) < 0$: contradiction.

On en déduit que $(E_1, G_1) = (E, G)$, ce qui établit l'unicité.

Question de cours 4 — **Propriété** : soient $F = P/Q$ une fraction rationnelle, et α un pôle simple de F. Dans ce contexte, on peut écrire : $F = G + \dfrac{\lambda}{X-\alpha}$, où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle, et $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$

Preuve. Soient donc $F = P/Q$ une fraction rationnelle et α un pôle simple de F. On peut écrire (d'après la question de cours précédente) :

$$F = G + \frac{\lambda}{X-\alpha} \qquad (\spadesuit)$$

où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle.

Par ailleurs, il existe un polynôme Q_1 tel que : $Q = (X-\alpha)\,Q_1$ et $Q_1(\alpha) \neq 0$.

En multipliant l'identité ($\spadesuit$) par $(X-\alpha)$ on obtient :

$$\frac{P}{Q_1} = (X-\alpha)\,G + \lambda$$

L'évaluation en α de cette relation donne : $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$ $\qquad$ ($\clubsuit$).

Par ailleurs, puisque $Q = (X-\alpha)\,Q_1$, on a : $Q' = Q_1 + (X-\alpha)Q_1'$. D'où : $Q_1(\alpha) = Q'(\alpha)$.

On déduit de cette dernière égalité et de ($\clubsuit$) que : $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

Question de cours 5 — **Propriété (lemme-clef)** : soit $F \in \mathbb{K}(X)$, et soit α un pôle simple de multiplicité de F. Il existe un unique couple (λ, G) avec $\lambda \in \mathbb{K}$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ n'admettant pas α pour pôle tel que :

$$F = G + \frac{\lambda}{X-\alpha}$$

Preuve. Notons $F = P/Q$. Puisque par hypothèse α est un pôle simple de F, α est racine simple de Q. Il s'ensuit que :

$$\exists\, Q_1 \in \mathbb{K}[X],\ \left[(Q = (X-\alpha)\,Q_1) \wedge (Q_1(\alpha) \neq 0)\right]$$

Les polynômes $(X-\alpha)$ et Q_1 sont premiers entre eux (essentiellement puisque $(X-\alpha)$ ne divise pas Q_1). D'après le théorème de Bezout dans $\mathbb{K}[X]$, il existe donc deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$U\,(X-\alpha) + V Q_1 = 1$$

On en déduit que :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PU\,(X-\alpha) + PVQ_1}{(X-\alpha)\,Q_1} = \frac{PU}{Q_1} + \frac{PV}{(X-\alpha)}$$

On effectue alors la division euclidienne de PV par $(X-\alpha)$ pour écrire :

$$\exists\,(S,\lambda) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}, \quad PV = S\,(X-\alpha) + \lambda$$

On en déduit que :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PU}{Q_1} + S + \frac{\lambda}{X-\alpha}$$

Finalement, on pose : $G = \dfrac{PU}{Q_1} + S = \dfrac{PU + SQ_1}{Q_1}$. Ainsi, G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle.

Conclusion. Si F est une fraction rationnelle admettant α comme pôle simple, alors il existe un couple $(G, \lambda) \in \mathbb{K}(X) \times \mathbb{K}$ tel que G n'admet pas α pour pôle, et

$$F = G + \frac{\lambda}{X - \alpha}$$

(La preuve de l'unicité est non-exigible). Supposons qu'il existe deux couples (G_1, λ_1) et (G_2, λ_2) vérifiant les conditions de la conclusion ci-dessus. Alors en particulier :

$$G_1 - G_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{X - \alpha}$$

Puisque α n'est pas un pôle de $G_1 - G_2$, on en déduit que α est racine du polynôme constant $\lambda_2 - \lambda_1 \ldots$ Il s'ensuit que $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$. Ce qui entraîne $(G_1, \lambda_1) = (G_2, \lambda_2)$, prouve l'unicité désirée, et achève la démo de cette propriété.

Remarque. La propriété précédente reste valide pour un pôle de multiplicité p, avec $p \geqslant 2$. L'énoncé et la preuve de cette affirmation sont indiqués ci-dessous.

Question de cours 6 — **Propriété (non-exigible lors de cette colle)** : soit $F \in \mathbb{K}(X)$, et soit α un pôle de multiplicité p de F. Il existe un unique couple (R, G) avec $R \in \mathbb{K}[X]$ de degré $< p$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ n'admettant pas α pour pôle tel que :

$$F = G + \frac{R}{(X - \alpha)^p}$$

Preuve. Notons $F = P/Q$. Puisque par hypothèse α est un pôle de multiplicité p de F, α est racine de multiplicité p de Q. Il s'ensuit que :

$$\exists\, Q_1 \in \mathbb{K}[X],\ [(Q = (X - \alpha)^p\, Q_1) \wedge (Q_1(\alpha) \neq 0)]$$

Les polynômes $(X - \alpha)^p$ et Q_1 sont premiers entre eux (puisque $(X - \alpha)$ ne divise pas Q_1). D'après le théorème de Bezout, il existe donc deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$U\,(X - \alpha)^p + VQ_1 = 1$$

On en déduit que :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PU\,(X - \alpha)^p + PVQ_1}{(X - \alpha)^p\, Q_1} = \frac{PU}{Q_1} + \frac{PV}{(X - \alpha)^p}$$

On effectue alors la division euclidienne de PV par $(X - \alpha)^p$ pour écrire :

$$\exists\,(S, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad PV = S\,(X - \alpha)^p + R \text{ avec } \deg(R) < p$$

On en déduit que :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PU}{Q_1} + S + \frac{R}{(X - \alpha)^p}$$

Finalement, on pose : $G = \dfrac{PU}{Q_1} + S = \dfrac{PU + SQ_1}{Q_1}$. Ainsi, G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle.

Conclusion. Si F est une fraction rationnelle admettant α pour pôle de multiplicité p, alors il existe un couple $(G, R) \in \mathbb{K}(X) \times \mathbb{K}[X]$ tel que G n'admet pas α pour pôle, R est de degré $< p$, et

$$F = G + \frac{R}{(X - \alpha)^p}$$

Reste à vérifier l'unicité : supposons qu'il existe deux couples (G_1, R_1) et (G_2, R_2) vérifiant les conditions de la conclusion ci-dessus. Alors en particulier :

$$G_1 - G_2 = \frac{R_2 - R_1}{(X - \alpha)^p}$$

Puisque α n'est pas un pôle de $G_1 - G_2$, on en déduit que α est racine de multiplicité au moins égale à p de $R_2 - R_1$. Or, les polynômes R_1 et R_2 étant de degré strictement inférieur ou égal à p, on a : $\deg(R_2 - R_1) < p$. Il s'ensuit que $R_2 - R_1 = 0$. Ce qui entraîne $(G_1, R_1) = (G_2, R_2)$, prouve l'unicité désirée, et achève la preuve de cette propriété.

Banque d'exercices

Exercice 1 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^3 - X}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 2 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X(X-1)^2}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 3 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^3 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 4 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ (avec $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$).

Exercice 5 — On note φ l'application qui à toute fraction rationnelle dans $\mathbb{K}(X)$ associe sa partie polaire.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}(X)$; déterminer $\ker \varphi$ et $\mathrm{im}\varphi$.

Pour information. Et comme vous avez été très sages durant ce chapitre, voici l'énoncé général du théorème de décomposition en éléments simples !

Théorème (Décomposition en éléments simples). Soit $F = P/Q \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle non nulle sous forme irréductible (avec Q unitaire).

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors : $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = E + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{ik}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}}$

  où l'on a noté E la partie entière de F, et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{p_i}$ la décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{C}[X]$;

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors : $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{ik}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{b_{ik}X + c_{ik}}{(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j-k}}$

  où l'on a noté E la partie entière de F, et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)_i^{p}\prod_{j=1}^{m}\left(X^2+\beta_j X+\gamma_j\right)^{q_j}$ la décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque. Cet énoncé n'est certainement pas à apprendre dans sa forme générale !

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^3 - X}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

La fraction rationnelle F est de degré strictement négatif ($\deg F = -3$), et elle possède exactement trois pôles simples, qui sont 0 et ± 1. D'après le cours :

$$\exists!\ (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, \qquad \frac{1}{X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$$

➤ **Valeur de** a. Puisque 0 est un pôle simple de F, on a : $a = \dfrac{P(0)}{Q'(0)}$, avec $P = 1$ et $Q' = 3X^2 - 1$. D'où : $a = -1$.

➤ **Valeur de** b. Puisque 1 est un pôle simple de F, on a : $b = \dfrac{P(1)}{Q'(1)}$. D'où : $b = \dfrac{1}{2}$.

➤ **Valeur de** c. Puisque -1 est un pôle simple de F, on a : $c = \dfrac{P(-1)}{Q'(-1)}$. D'où : $c = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. $\dfrac{1}{X^3 - X} = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+1}$

Exercice 2 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X(X-1)^2}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

La fraction rationnelle F est de degré strictement négatif ($\deg F = -3$), et elle possède exactement un pôle simple (qui est 0) et un pôle double (qui est 1). D'après le cours :

$$\exists!\ (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, \qquad \frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$$

➤ **Valeur de** a. Puisque 0 est un pôle simple de F, on a : $a = \dfrac{P(0)}{Q'(0)}$, avec $P = 1$ et $Q' = 3X^2 - 4X + 1$. D'où : $a = 1$.

➤ **Valeur de** c. Par multiplication (par $(X-1)^2$) et évaluation (en 1), on obtient : $c = 1$.

➤ **Valeur de** b. Par multiplication (par $(X-1)$) et passage à la limite (en $+\infty$), on obtient : $a + b = 0$. D'où : $b = -1$.

Conclusion. $\dfrac{1}{X(X-1)^2} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2}$

Exercice 3 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^3 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$.

La fraction rationnelle F est de degré strictement négatif ($\deg F = -3$), et elle possède exactement trois pôles simples (dans $\mathbb{C}$), qui sont 1, j et $\bar{\mathrm{j}}$. D'après le cours :

$$\exists!\ (a,b) \in \mathbb{C}^2, \qquad \frac{1}{X^3 - 1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X - \mathrm{j}} + \frac{\bar{b}}{X - \bar{\mathrm{j}}}$$

➤ **Valeur de** a. Puisque 1 est un pôle simple de F : $a = \dfrac{P(1)}{Q'(1)}$, avec $P = 1$ et $Q' = 3X^2$. D'où : $a = \dfrac{1}{3}$.

➤ **Valeur de** b. Puisque j est un pôle simple de F, on a : $b = \dfrac{P(\mathrm{j})}{Q'(\mathrm{j})}$. D'où : $b = \dfrac{1}{3\mathrm{j}^2} = \dfrac{\mathrm{j}}{3}$.

Conclusion 1. La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$ est :

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{\mathrm{j}}{X-\mathrm{j}} + \frac{\bar{\mathrm{j}}}{X-\bar{\mathrm{j}}}\right)$$

On somme les deux termes non-réels pour achever l'exercice.

Conclusion 2. La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1}\right)$$

Exercice 4 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^n-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ (avec $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$).

La fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^n-1}$ admet exactement n pôles simples dans $\mathbb{C}$, qui sont les racines n-ièmes de l'unité. Il existe donc un (unique) n-uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$ de complexes tels que :

$$\frac{1}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega^k} = \frac{\lambda_0}{X-1} + \frac{\lambda_1}{X-\omega} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{X-\omega^{n-1}}$$

où l'on a noté comme d'habitude : $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

Soit k un entier compris entre 0 et $n-1$. D'après le cours : $\lambda_k = \dfrac{1}{Q'\left(\omega^k\right)}$ avec $Q' = nX^{n-1}$

Or : $Q'\left(\omega^k\right) = n\left(\omega^k\right)^{n-1} = n\omega^{-k}$. Ainsi : $\lambda_k = \dfrac{1}{n}\,\omega^k$.

Conclusion. $\dfrac{1}{X^n-1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{X-\omega^k}$

Exercice 5 — On note φ l'application qui à toute fraction rationnelle dans $\mathbb{K}(X)$ associe sa partie polaire.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}(X)$; déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{im}\varphi$.

Soient F_1 et F_2 dans $\mathbb{K}(X)$. D'après le cours :

$$\exists!\ (E_1, E_2, G_1, G_2) \in \mathbb{K}[X]^2 \times \mathbb{K}(X)^2, \quad F_i = E_i + G_i \quad \text{et } \deg G_i < 0$$

Par définition de φ, on a : $\varphi(F_i) = G_i$.

Par ailleurs, pour tout couple de scalaires (λ, μ), on a : $\lambda F_1 + \mu F_2 = (\lambda E_1 + \mu E_2) + (\lambda G_1 + \mu G_2)$.

Dans le terme de droite de cette égalité, notons que : $\lambda E_1 + \mu E_2$ est un polynôme, et $\lambda G_1 + \mu G_2$ une fraction rationnelle de degré strictement négatif (propriétés du degré dans $\mathbb{K}(X)$).

Il s'ensuit que $\lambda G_1 + \mu G_2$ est la partie polaire de $\lambda F_1 + \mu F_2$.

Avec les notations de l'énoncé, ceci signifie que : $\varphi\left(\lambda F_1 + \mu F_2\right) = \lambda\varphi(F_1) + \mu\varphi(F_2)$.
Donc $\varphi \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}(X)\right)$.

Il est aisé de voir (et de justifier) que $\ker\varphi = \mathbb{K}[X]$, et que $\mathrm{im}\varphi = \{F \in \mathbb{K}(X),\ \deg(F) < 0\}$.