Exercices 21 — Fractions rationnelles — Corrigé de l'exo 2

Exercice 2 — 1/ On considère la fraction rationnelle : $F = \dfrac{3X^2 - X + 10}{X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12}$.

a/ D'après le cours : $\boxed{\deg\left(\dfrac{3X^2 - X + 10}{X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12}\right) = -2}$. La partie entière de F est donc $\boxed{\text{nulle}}$.

b/ Notons $Q = X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12$. D'après l'énoncé, Q admet 1 et 2 pour racines. Il s'ensuit que $(X-1)(X-2)$ divise le polynôme Q.

En effectuant la division euclidienne de Q par $(X-1)(X-2)$, on obtient : $Q = (X-1)(X-2)(X^2 + 5X + 6)$. Le polynôme du second degré se factorisant aisément, on en déduit que : $Q = (X-1)(X-2)(X+2)(X+3)$.

Par suite : $F = \dfrac{3X^2 - X + 10}{(X-1)(X-2)(X+2)(X+3)}$.

On déduit de cette écriture et du théorème de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ que :

$$\exists!\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X+2} + \frac{d}{X+3}$$

Puisque F ne possède que des pôles simples, les réels a, b, c et d peuvent être trouvés à l'aide de la "formule magique".*

En notant $P = 3X^2 - X + 10$, et $Q = X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12$, on a : $Q' = 4X^3 + 6X^2 - 14X - 8$. Par conséquent :

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{12}{-12} = -1\,;\quad b = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{20}{20} = 1\,;\quad c = \frac{P(-2)}{Q'(-2)} = \frac{24}{12} = 2\,;\quad d = \frac{P(-3)}{Q'(-3)} = \frac{40}{-20} = -2.$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion. } \frac{3X^2 - X + 10}{(X-1)(X-2)(X+2)(X+3)} = \frac{1}{X-2} - \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+2} - \frac{2}{X+3}}.$$

2/ Soit un entier $N \geqslant 3$. D'après la question précédente :

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{3n^2 - n + 10}{n^4 + 2n^3 - 7n^2 - 8n + 12} = \sum_{n=3}^{N} \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}\right]$$

D'où : $S_N = \left(\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right]\right) + 2\left(\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right]\right)$

Ayant reconnu deux sommes téléscopiques, on en déduit que :

$$S_N = 1 - \frac{1}{N-1} + 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{N+3}\right) = \frac{7}{5} - \frac{1}{N-1} - \frac{2}{N+3}$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall N \in \mathbb{N},\ N \geqslant 3,\ S_N = \frac{7}{5} - \frac{1}{N-1} - \frac{2}{N+3}}$$

3/ On déduit immédiatement de ce qui précède que : $\boxed{(S_N)_N \text{ est convergente, et } \lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \dfrac{7}{5}}$.

*. "$\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$". Les coefficients a, b, c et d pourraient également être obtenus par "multiplication/évaluation".