Exercices 23 — Probabilités — Corrigé

Probabilités "basiques", conditionnelles, formule(s) des probas totales

Exercice 1. — Une urne contient 3 billes vertes et 5 billes rouges toutes indiscernables au toucher. Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne ; il note sa couleur et ne remet pas la bille dans l'urne. Puis il tire une seconde bille de l'urne et il note sa couleur.
Calculer la probabilité des évènements suivants : E_1 : "Le joueur a tiré deux billes rouges" et E_2 : "Le joueur a tiré exactement une bille verte".

Notons R_1, R_2, V_1 et V_2 respectivement les évènements "tirer une bille rouge en premier", etc...

On a : $p\left(E_1\right) = p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{5}{14}$.

D'autre part :

$$p\left(E_2\right) = p\left((V_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap V_2)\right) = p(V_1) \times p_{V_1}(R_2) + p(R_1) \times p_{R_1}(V_2) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$$

Exercice 2. — Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.
La probabilité que la première cible soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.
Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\dfrac{3}{4}$.
Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.
On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- a_n (*resp.*b_n) la probabilité de l'évènement A_n (*resp.*$\overline{A_n}$).

1/ Donner a_1 et b_1. Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

D'après l'énoncé : $a_1 = b_1 = \dfrac{1}{2}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$a_2 = p(A_2) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{\overline{A_1}}(A_2) \times p(\overline{A_1}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

On en déduit que :

$$b_2 = p\left(\overline{A_2}\right) = 1 - p(A_2) = 1 - a_2 = \frac{3}{8}$$

2/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$: $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$. Puis établir que : $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $\left\{A_n, \overline{A_n}\right\}$ constitue un SCE. D'après la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \times p(\overline{A_n}) = \frac{3}{4} \times a_n + \frac{1}{2} \times b_n$$

Or : $b_n = p(\overline{A_n}) = 1 - p(A_n) = 1 - a_n$. D'où :

$$a_{n+1} = \frac{3}{4} \times a_n + \frac{1}{2} \times (1 - a_n) = \frac{1}{4} \times a_n + \frac{1}{2}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{4} \times a_n + \dfrac{1}{2}$.

3/ Déduire de la question précédente l'expression de a_n en fonction de n, puis la limite de la suite (a_n).

D'après la question précédente, la suite (a_n) est une suite arithmético-géométrique. On introduit donc judicieusement la suite u définie en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = a_n - \ell \text{ où le réel } \ell \text{ est tel que : } \ell = \frac{1}{4} \times \ell + \frac{1}{2}$$

Un calcul immédiat donne : $\ell = \dfrac{2}{3}$. On peut alors vérifier que u est géométrique de raison $1/4$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \underbrace{-\frac{1}{6}}_{=u_1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Il s'ensuit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

En particulier, la suite a est convergente, et a pour limite $2/3$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ d'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$

Exercice 3. — Marche aléatoire sur un carré.

ABCD est un carré de centre O. Un jeton posé sur l'un des cinq points peut se déplacer de façon aléatoire vers l'un des autres voisins suivant le mode suivant : tous les pas issus de l'un sommets A, B, C et D ont pour probabilité $1/3$; et tous les pas issus de O ont une probabilité de $1/4$. Un chemin est une suite de pas successifs. Au départ le jeton est en A.

1/ Le jeton fait deux pas. Calculer la probabilité qu'il arrive en A, en B, en C, en D, en O ?

Notons a_n, b_n, etc... les probabilités que le jeton arrive respectivement en A, en B, etc... au bout de n pas.

Les évènements A_1, B_1, C_1, D_1 et O_1 constituent un SCE. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$a_2 = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1) + p_{C_1}(A_2) \times p(C_1) + p_{D_1}(A_2) \times p(D_1) + p_{O_1}(A_2) \times p(O_1)$$

Or, d'après l'énoncé :

$$a_2 = p_{A_1}(A_2) \times \underbrace{p(A_1)}_{=0} + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1) + p_{C_1}(A_2) \times \underbrace{p(C_1)}_{=0} + p_{D_1}(A_2) \times p(D_1) + p_{O_1}(A_2) \times p(O_1)$$

Puis :

$$a_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{12} = \frac{11}{36}$$

Sur le même principe :

$$b_2 = p_{O_1}(B_2) \times p(0_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \qquad \text{et : } d_2 = b_2 = \frac{1}{12}$$

Enfin :

$$c_2 = p_{O_1}(C_2) \times p(0_1) + p_{D_1}(C_2) \times p(D_1) + p_{B_1}(C_2) \times p(B_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{36}$$

Et :

$$o_2 = p_{D_1}(O_2) \times p(D_1) + p_{B_1}(O_2) \times p(B_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Conclusion. $a = 2 = c_2 = \dfrac{11}{36}$; $b_2 = d_2 = \dfrac{1}{12}$ et $o_2 = \dfrac{2}{9}$.

Remarque. On peut observer, et c'est rassurant, que : $a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + o_2 = 1$.

2/ Il fait un pas de plus. Quelle est la probabilité qu'il arrive en O ?

D'après la formule des probabilités totales et l'énoncé :

$$o_3 = p_{A_2}(O_3) \times a_2 + p_{B_2}(O_3) \times b_2 + p_{C_2}(O_3) \times c_2 + p_{D_2}(O_3) \times d_2$$

D'après la question précédente, on a donc :

$$o_3 = \frac{1}{3} \times (a_2 + b_2 + c_2 + d_2) = \frac{1}{3} \times (1 - o_2) = \frac{1}{3} \times (1 - o_2) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{2}{9}\right)$$

Conclusion. $o_3 = \dfrac{7}{27}$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note p_n la probabilité pour que le jeton arrive en O après n pas. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}\,(1 - p_n)$$

Les évènements A_n, B_n, C_n, D_n et O_n constituent un SCE. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$p_{n+1} = p_{A_n}(O_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(O_{n+1}) \times p(B_n) + p_{C_n}(O_{n+1}) \times p(C_n) + p_{D_n}(O_{n+1}) \times p(D_n) + p_{O_n}(O_{n+1}) \times p(O_n)$$

D'où :

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}\,(a_n + b_n + c_n + d_n)$$

Or $a_n + b_n + c_n + d_n + p_n = 1$ (puisque les évènements A_n, B_n, C_n, D_n et O_n constituent un SCE).

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 - p_n)$

4/ Expliciter p_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} p_n$.

D'après la question précédente, la suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique. On introduit donc judicieusement la suite u définie en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = p_n - \ell \text{ où le réel } \ell \text{ est tel que : } \ell = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \ell$$

Un calcul immédiat donne : $\ell = \dfrac{1}{4}$. On peut alors vérifier que u est géométrique de raison $1/3$. On en déduit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \underbrace{\frac{1}{12}}_{=u_1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Il s'ensuit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

En particulier, la suite p est convergente, et a pour limite $1/4$.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$

Variables aléatoires réelles

Exercice 4. — Soit n un entier naturel non nul, et soit α un réel. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0; n]\!]$ telle que :

$$\forall\, k \in [\![0; n]\!], \quad P(X = k) = \alpha k^2$$

1/ Déterminer la valeur de α.

Puisque X est à valeurs dans $[\![0; n]\!]$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$.

D'après l'énoncé, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha k^2 = 1 \iff \alpha \sum_{k=0}^{n} k^2 = 1 \iff \alpha \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1$$

Conclusion. $\alpha = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}$

2/ Calculer l'espérance de X.

Puisque X est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, on a : $\displaystyle E(X)=\sum_{k=0}^{n}kP(X=k)$.

D'après l'énoncé et la question précédente, on en déduit que :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}\alpha k^3=\alpha\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Conclusion. $E(X)=\dfrac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$

Exercice 5. — Deux joueurs lancent 10 fois de suite (et de manière indépendante) une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité que les deux joueurs obtiennent le même nombre de “pile” au cours des 10 lancers.

Notons p la probabilité recherchée.

Notons encore X et Y les nombres de “pile” obtenues par chacun des deux joueurs au cours des 10 lancers. D'après l'énoncé (les lancers étant indépendants, et la pièce bien équilibrée), X et Y suivent la loi binomiale $\mathscr{B}(10,1/2)$ $(\spadesuit)$.

Par ailleurs, les joueurs obtiennent le même nombre de “pile” au cours des 10 lancers SSI ils obtiennent tous les deux 0 “pile”, ou 1 “pile”,..., ou 10 “pile”.

En d'autres termes, les joueurs obtiennent le même nombre de “pile” au cours des 10 lancers SSI

$$(X=0\cap Y=0)\text{ ou }(X=1\cap Y=1)\ \dots\ (X=10\cap Y=10)$$

Les évènements $(X=k\cap Y=k)$ étant deux à deux disjoints, on a :

$$p=\sum_{k=0}^{10}P\left(X=k\cap Y=k\right)$$

Puisque les joueurs jouent de manière indépendante (énoncé), les évènements $X=k$ et $Y=k$ sont indépendants, d'où :

$$p=\sum_{k=0}^{10}P\left(X=k\right)\times p\left(Y=k\right)$$

D'après $(\spadesuit)$, on en déduit que :

$$p=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{20-2k}$$

D'où :

$$p=\frac{1}{2^{20}}\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}^2$$

Il reste à voir que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}^2=\binom{20}{10}$ pour conclure.*

Conclusion. La probabilité que les deux joueurs obtiennent le même nombre de "pile" au cours des 10 lancers est : $\dfrac{1}{2^{20}}\dbinom{20}{10}$.

Exercice 6. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y=n-X$?

Par hypothèse, $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $Y=n-X$. Il s'ensuit que : $Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$.

En outre, pour tout entier $k\in[\![0,n]\!]$, on a :

$$P(Y=k)=P(X=n-k)=\binom{n}{n-k}p^{n-k}(1-p)^k=\binom{n}{k}(1-p)^kp^{n-k}$$

Conclusion. $Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et : $\forall\, k\in[\![0,n]\!],\ P(Y=k)=\dbinom{n}{k}(1-p)^kp^{n-k}$. Donc Y suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $(1-p)$.

Exercice 7. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $p\in]0;1[$. Pour quelle valeur de k, la probabilité $p_k=P(X=k)$ est-elle maximale ?

Par hypothèse, $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$. Pour tout entier $k\in[\![0,n]\!]$, on a : $p_k=P(X=k)>0$ et :

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}=\frac{\binom{n}{k+1}p}{\binom{n}{k}(1-p)}=\frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

On en déduit que :

$$p_{k+1}\geqslant p_k\Longleftrightarrow\frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}\geqslant 1\Longleftrightarrow(n-k)p\geqslant(k+1)(1-p)\Longleftrightarrow k\leqslant(n+1)p-1$$

D'où :

$$p_{k+1}\geqslant p_k\Longleftrightarrow k\leqslant\lfloor(n+1)p-1\rfloor$$

Conclusion. p_k est maximale lorsque $k=\lfloor(n+1)p\rfloor$.

Exercice 8. — Un archer tire sur n cibles. A chaque tir, il a la probabilité p de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants.

Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet.

L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchées lors de cette tentative.

Déterminer la loi de la variable $Z=X+Y$.

D'après l'énoncé : $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$.

Soit $k\in[\![0,n]\!]$. On a :

*. Cette dernière somme n'est pas triviale ; mais on l'a déjà établie dans le cours sur les polynômes (application de la formule de Leibniz).

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=P\left(\bigcup_{i=0}^{k}(X=i\cap Y=k-i)\right)=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i\cap Y=k-i\right)$$

D'où :

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i\right)P_{X=i}\left(Y=k-i\right)$$

Donc :

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{n-i}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-k}=p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}(1-p)^{-i}$$

D'où :

$$P(Z=k)=p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\frac{n!}{i!k!}\frac{k!}{(k-i)!(n-k)!}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{i!(k-i)!}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(1+\frac{1}{1-p}\right)^k$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=\binom{n}{k}\left[(2-p)p\right]^k\left[(1-p)^2\right]^{n-k}$$

Conclusion. $Z(\Omega)=\llbracket\, 0,n\,\rrbracket$ et : $\forall\, k\in\llbracket\, 0,n\,\rrbracket,\ P(Z=k)=\binom{n}{k}\left[(2-p)p\right]^k\left[(1-p)^2\right]^{n-k}$. Donc Z suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $(2-p)p$.

Exercice 9. — Soit p un réel tel que : $0<p<1$.

Un joueur répète de manière successive et indépendante une expérience au cours de laquelle il peut connaître un succès (avec la probabilité p) ou un échec (avec la probabilité $q=1-p$).

Le jeu s'arrête au premier succès.

On note X la variable aléatoire égale au rang du premier succès.

Au cours de cet exercice, on pourra au besoin noter S_k l'évènement "le joueur a obtenu un succès au cours de la k-ième expérience", et E_k l'évènement $\overline{S}_k$ (pour tout entier naturel non nul k).

1/ Indiquer quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X, justifier brièvement que $P(X=2) = qp$. Que vaut $P(X=3)$?

2/ Pour tout entier naturel non nul N, calculer $P(X \leqslant N)$.

3/ Vérifier que : $\lim\limits_{N \longrightarrow +\infty} \left[\sum_{k=1}^{N} P(X=k)\right] = 1$.

4/ Calculer l'espérance de X.

1/ On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

De plus : $P(X=2) = P\left(\overline{S_1} \cap S_2\right) = P\left(\overline{S_1}\right) \times P(S_2) = qp$ (puisque les expériences sont indépendantes).

De même : $P(X=3) = P\left(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3\right) = P\left(\overline{S_1}\right) \times P\left(\overline{S_2}\right) \times P(S_3) = q^2 p$ (de nouveau puisque les expériences sont indépendantes).

2/ Soit N un entier naturel non nul. On a :

$$P(X \leqslant N) = \sum_{k=1}^{N} P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} q^{k-1} p = p \sum_{k=0}^{N-1} q^k = p\frac{1-q^N}{1-q}$$

Puisque $1-q=p$, on en déduit finalement que : $P(X \leqslant N) = 1 - q^N$.

3/ D'après la question précédente : $\lim\limits_{N \to +\infty} P(X \leqslant N) = 1$ (car $\lim\limits_{N \to +\infty} q^N = 0$).

4/ L'espérance de X est égale à :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) \text{ càd : } E(X) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} kP(X=k)$$

Or pour tout entier naturel N non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1}$$

En résumé :

$$E(X) = p \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} \qquad (\spadesuit)$$

Calculons $u_N = \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1}$. A cette fin, on introduit judicieusement une fonction f définie sur $]0,1[$ en posant :

$$f(q) = \sum_{k=1}^{N} q^k$$

Naturellement : $f(q) = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$. De plus, f est dérivable sur $]0,1[$ et on a deux expressions pour la dérivée de f.

D'une part :

$$f'(q) = \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} \text{ (on reconnaît l'expression de } u_N\text{)}$$

D'autre part :

$$f'(q) = \frac{-(N+1)q^N(1-q) + 1 - q^{N+1}}{(1-q)^2} = \frac{-(N+1)q^N(1-q) - q^{N+1} + 1}{p^2}$$

Par suite :

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} = \frac{-(N+1)q^N(1-q) - q^{N+1} + 1}{p^2}$$

Donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} = \frac{1}{p^2} \qquad (\clubsuit)$$

On déduit de ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) que :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Exercice 10. — Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$.

On pose $Y = 1 - X$.

Déterminer la loi de probabilité de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

Comme X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$, on a $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$, et :

$$\forall\, k \in [\![0, 3]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k} = \binom{n}{k} \times \frac{2^{3-k}}{27}$$

Explicitement, la loi de X est donc :

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

On en déduit que $Y(\Omega) = [\![-2, 1]\!]$, et la loi de Y est donnée par le tableau ci-dessous :

y_i	-2	-1	0	1
p_i	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

En outre, d'après le cours : $\forall\,(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Toujours d'après le cours, puisque X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$, on a : $E(X) = 1$ et $V(X) = \dfrac{2}{3}$.

On en déduit que : $\boxed{E(Y) = 0 \text{ et } V(Y) = \dfrac{2}{3}}$.

Exercice 11. — Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, p un réel de $[0,1]$, et X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, et que Y suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

1/ A propos de la loi uniforme $\mathscr{U}\left([\![0, n]\!]\right)$.

a/ Calculer l'espérance de Y.

b/ Etablir que la variance de Y est : $\quad \mathrm{V}(Y) = \dfrac{n(n+2)}{12}$.

2/ On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$.

a/ Calculer la probabilité p_1 que la matrice C soit antisymétrique.

b/ Calculer la probabilité p_2 que la matrice C soit symétrique.

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, p un réel de $[0,1]$, et X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, et que Y suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

1/ **A propos de la loi uniforme** $\mathscr{U}\left([\![0, n]\!]\right)$.

a/ Puisque Y suit la loi $\mathscr{U}\left([\![0, n]\!]\right)$, on a $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et pour tout entier k compris entre 0 et n, on a : $P(Y = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

Il s'ensuit que : $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2\,(n+1)}$. D'où : $\boxed{E(Y) = \dfrac{n}{2}}$.

b/ D'après la formule de Koenig-Huygens : $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$. D'après la question précédente : $E(Y)^2 = \dfrac{n^2}{4}$, et d'après la formule de transfert : $E(Y^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\,(n+1)} = \frac{n(2n+1)}{6}$.

On en déduit que : $V(Y) = \dfrac{n(2n+1)}{6} - \dfrac{n^2}{4} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{2n+1}{3} - \dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{n}{2} \times \dfrac{n+2}{6}$.

$\boxed{\textbf{Conclusion. } V(Y) = \dfrac{n(n+2)}{12}}$.

2/ On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$.

a/ Puisqu'une matrice antisymétrique possède une diagonale nulle, la matrice C est antisymétrique si et seulement si $X = Y = 0$.

Ainsi : $p_1 = P\left(X = 0 \cap Y = 0\right) = P\left(X = 0\right) \times P\left(Y = 0\right) = (1-p)^n \times \dfrac{1}{n+1}$.

Conclusion. La probabilité p_1 que la matrice C soit antisymétrique est : $\boxed{p_1 = \dfrac{(1-p)^n}{n+1}}$.

b/ La matrice C est symétrique si et seulement si $X = Y$. Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![\, 0, n \,]\!]$, les VAR X et Y sont égales si et seulement si $X = Y = 0$ ou $X = Y = 1$ ou... $X = Y = n$.

D'où : $p_2 = P\left(X = Y\right) = P\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} (X = k \cap Y = k)\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(X = k \cap Y = k\right) = \sum_{k=0}^{n} P\left(X = k\right) \times P\left(Y = k\right)$

(l'avant dernière égalité provenant du fait que les évènements $(X = k \cap Y = k)$ sont deux à deux disjoints, et la dernière de l'hypothèse suivant laquelle X et Y sont indépendantes).

Ainsi : $p_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times \frac{1}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{=1}$

Conclusion. La probabilité p_2 que la matrice C soit symétrique est : $\boxed{p_2 = \dfrac{1}{n+1}}$.

Exercice 13. — **(Urnes de Pólya, CCP 2021).**

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges, et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

- si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
- si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire ;

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Partie I — Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.

D'après l'énoncé, X_1 est égale à 1 si la boule tirée au premier tirage est blanche, 0 si cette boule est rouge. Donc : $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$

En outre, puisque l'urne contient b boules blanches, et $(b+r)$ boules au total, et que ces boules sont indiscernables au toucher, on a : $P(X_1 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$ et $P(X_1 = 0) = \dfrac{r}{b+r}$.

Conclusion. $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$; $P(X_1 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$ et $P(X_1 = 0) = \dfrac{r}{b+r}$. Donc X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

2. Calculer $P(X_2 = 1|X_1 = 1)$, et $P(X_2 = 1|X_1 = 0)$. En déduire la loi de X_2.

D'après l'énoncé, X_2 est égale à 1 si la boule tirée au second tirage est blanche, 0 si cette boule est rouge. Donc : $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.

Si $X_1 = 1$, une boule blanche a été tirée au premier essai. Avant le deuxième tirage, l'urne contient donc $(b+1)$ boules blanches et r boules rouges. Donc : $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \dfrac{b+1}{b+r+1}$.

Si $X_1 = 0$, une boule rouge a été tirée au premier essai. Avant le deuxième tirage, l'urne contient donc b boules blanches et $(r+1)$ boules rouges. Donc : $P(X_2 = 1|X_1 = 0) = \dfrac{b}{b+r+1}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1|X_1 = 1) \times P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1|X_1 = 0) \times P(X_1 = 0)$$

$$\Longleftrightarrow P(X_2 = 1) = \frac{b+1}{b+r+1} \times \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+1} \times \frac{r}{b+r}$$

$$\Longleftrightarrow P(X_2 = 1) = \frac{b(b+1) + br}{(b+r+1)(b+r)} = \frac{b(b+r+1)}{(b+r+1)(b+r)}$$

D'où : $P(X_2 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$.

Puisque $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$, on en déduit que : $P(X_2 = 0) = 1 - P(X_2 = 1) = 1 - \dfrac{b}{b+r} = \dfrac{r}{b+r}$.

Conclusion. $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$; $P(X_2 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$ et $P(X_2 = 0) = \dfrac{r}{b+r}$. Donc X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

D'après l'énoncé, S_n est le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du n-ème tirage.

Toujours selon l'énoncé : $S_n(\Omega) = [\![b, b+n]\!]$.

Partie II — Loi de X_n

Dans cette partie, on considère $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P\left(X_{n+1} = 1 | S_n = k\right)$.

Si $S_n = k$, l'urne contient à l'issue du n-ème tirage $(b+r+n)$ boules, dont exactement k sont blanches.

Conclusion. $\forall\, k \in [\![b, n+b]\!], \qquad P\left(X_{n+1} = 1 | S_n = k\right) = \dfrac{k}{b+r+n}.$

5. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathrm{E}\left(S_n\right)}{b+r+n}$$

Puisque $S_n(\Omega) = [\![b, b+n]\!]$, la famille d'évènements $\{S_n = k,\ k \in [\![b, n+b]\!]\}$ est un système complet d'évènements. Il est donc légitime d'appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{n+b} P\left(X_{n+1} = 1 \cap S_n = k\right) = \sum_{k=b}^{n+b} P\left(X_{n+1} = 1 | S_n = k\right) \times P(S_n = k)$$

$$= \frac{1}{b+r+n} \sum_{k=b}^{n+b} k \times P(S_n = k)$$

Or : $\mathrm{E}\left(S_n\right) = \displaystyle\sum_{k=b}^{n+b} k \times P(S_n = k)$.

Conclusion. $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{\mathrm{E}\left(S_n\right)}{b+r+n}$