

CHAPITRE 22 — “L’ESSENTIEL” SUR LA DIMENSION DES ESPACES VECTORIELS

PRÉAMBULE. Ce chapitre est le second volet du cours d’algèbre linéaire de cette année : on y introduit la notion cruciale de dimension d’un espace vectoriel, dont on étudie quelques propriétés.

TABLE DES MATIÈRES

1. Familles libres et bases d’un espace vectoriel	1
2. Espaces vectoriels de dimension finie	3
2.1. Dimension	3
2.2. Théorème de la base extraite	4
2.3. Théorème de la base incomplète	4
3. Dimension d’une somme de sev	5
4. Coordonnées d’un vecteur dans une base, matrice de passage	6
4.1. Coordonnées	6
4.2. Changement de base et matrice de passage	6
5. Classification des ev de dimension finie	7

Dans ce chapitre, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Dorénavant, on pourra noter v au lieu de \vec{v} un élément de E .

1. FAMILLES LIBRES ET BASES D’UN ESPACE VECTORIEL

DÉFINITION 1 - Deux vecteurs u et v d’un \mathbb{K} -espace vectoriel E sont **colinéaires** s’il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$, ou s’il existe un scalaire λ tel que $v = \lambda u$.

PROPRIÉTÉ 1 - Deux vecteurs u et v non nuls d’un \mathbb{K} -espace vectoriel E sont colinéaires SSI il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tels que $\alpha u + \beta v = 0_E$.

Remarque. A l’opposé, u et v sont non colinéaires si et seulement si la relation $\alpha u + \beta v = 0_E$ implique $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

DÉFINITION 2 - Soit n un entier naturel non nul.

n vecteurs v_1, \dots, v_n d’un \mathbb{K} -ev E sont **linéairement indépendants** si :

$$\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_E \right] \implies [\forall i \in [1; n], \lambda_i = 0] \quad (\text{avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n)$$

Remarque. La définition fournit une méthode pour prouver que n vecteurs v_1, \dots, v_n d’un \mathbb{K} -ev E sont linéairement indépendants. Explicitement, on suppose qu’il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E$, et on établit que cette égalité n’est satisfaite que lorsque tous les λ_i sont nuls.

Exemples. Deux vecteurs sont linéairement indépendants SSI ils sont non colinéaires.

Si n (avec $n \geq 3$) vecteurs sont linéairement indépendants alors ils sont deux à deux non colinéaires. ATTENTION : la réciproque de cette dernière affirmation est FAUSSE. Dans \mathbb{R}^2 , les trois vecteurs $u(1, 0)$, $v(0, 1)$ et $w(1, 1)$ sont deux à deux non colinéaires ; mais u, v et w ne sont pas linéairement indépendants puisque $w = u + v$.

DÉFINITION 3 - Soient v_1, \dots, v_n n vecteurs d'un \mathbb{K} -ev E .

La famille $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est **libre** si les vecteurs v_1, \dots, v_n sont linéairement indépendants; dans le cas contraire on dit que \mathcal{F} est **lié**.

PROPRIÉTÉ 2 - Soient v_1, \dots, v_n n vecteurs d'un \mathbb{K} -ev E .

La famille $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est **liée SSI** il existe un entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $v_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n)$.

Exemples :

- ▶ soit v un vecteur de E . La famille $\mathcal{F} = (v)$ est libre SSI $v \neq 0_E$.
- ▶ dans \mathbb{R}^2 , la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2)$ est libre SSI $\det(v_1, v_2) \neq 0$.
- ▶ dans \mathbb{R}^3 : la famille $\mathcal{F} = (u(1, 2, 3), v(4, 5, 6), w(7, 8, 9))$ est liée puisque $w = 2v - u$. Et la famille $\mathcal{G} = (v_1, v_2)$ est libre SSI $v_1 \wedge v_2 \neq \vec{0}$
- ▶ dans $\mathbb{K}_2[X]$, la famille $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$ est (très clairement) libre.
La famille $\mathcal{G} = ((X - 1)(X - 2), X(X - 2), X(X - 1))$ est (un peu moins clairement) libre, puisque les 3 polynômes qui la constituent sont (à des constantes multiplicatives près) les polynômes d'interpolation de Lagrange de degré 2 associés aux valeurs 0, 1 et 2.
- ▶ dans $\mathbb{K}[X]$, on considère n polynômes P_1, \dots, P_n non nuls.
On suppose que : $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$. Alors la famille $\mathcal{F} = (P_1, \dots, P_n)$ est libre (toute famille échelonnée de polynômes est libre).

- ▶ dans $M_2(\mathbb{K})$, la famille $\mathcal{F} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \right)$ est libre.

- ▶ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille $\mathcal{F} = (\text{ch}, \text{sh}, \exp)$ est liée puisque $\exp = \text{ch} + \text{sh}$; mais la famille $\mathcal{G} = (\text{ch}, \text{sh})$ est libre.

DÉFINITION 4 - Une **base** d'un espace vectoriel E est une famille génératrice et libre de E .

Exemples :

- ▶ la famille $\mathcal{F} = (e_1(1, 0); e_2(0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^2 , appelée **base canonique de \mathbb{R}^2** . Définitions analogues pour les bases canoniques de \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^n et \mathbb{K}^n .
- ▶ la famille $\mathcal{F} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est la **base canonique de $M_2(\mathbb{K})$** .
- ▶ la famille $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$, appelée **base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$** ; plus généralement, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est la **base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$** .
La famille $\mathcal{G} = ((X - 1)(X - 2), X(X - 2), X(X - 1))$ est une autre base de $\mathbb{K}_2[X]$.

2. ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

2.1. Dimension.

DÉFINITION 5 - On appelle **\mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie** un \mathbb{K} -espace vectoriel E ayant une famille génératrice finie.

Exemples : \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^n , \mathbb{K}^n , $M_{np}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

En revanche, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (entre autres exemples) ne sont pas des espaces vectoriels de dimension finie.

La notion de dimension repose essentiellement sur les deux lemmes suivants.

LEMME 1 - Soit E un \mathbb{K} -ev.

- 1/ Toute famille de vecteurs de E contenue dans une famille libre est libre.
- 2/ Toute famille de vecteurs de E contenant une famille génératrice est génératrice.

LEMME 2 - Dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, le cardinal d'une famille libre est majoré par n .

Remarque. Une formulation équivalente de ce lemme est : dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal strictement plus grand que n est liée.

THÉORÈME 1 - Dans un espace vectoriel (non nul) de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

Le théorème rend légitime la définition suivante :

DÉFINITION 6 - Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel (non nul) de dimension finie.

On appelle **dimension** de E le cardinal d'une quelconque de ses bases (par convention, la dimension de l'espace vectoriel nul est zéro).

Notation. La dimension du \mathbb{K} -ev est notée $\dim_{\mathbb{K}} E$, ou $\dim E$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur \mathbb{K} .

Exemples :

► $\dim \mathbb{R}^3 = 3$; $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$; $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$; $\dim M_{n,p}(\mathbb{R}) = n \times p$; ...

► $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$; $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$; $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

► Un exemple "plus torturé" : $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ mais $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. En effet, une base du \mathbb{C} -ev \mathbb{C} est (1) , mais une base du \mathbb{R} -ev \mathbb{C} est $(1, i)$. "Dans le même style" : $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_3[X] = 4$ mais $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_3[X] = 8$.

2.2. Théorème de la base extraite.

THÉORÈME 2 - (“De la base extraite”). De toute famille génératrice on peut extraire une base.

Plus explicitement : si (v_1, \dots, v_n) est une famille génératrice d'un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul E , alors il existe un entier $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que (v_1, \dots, v_p) soit une base de E (quitte à renuméroter les vecteurs).

COROLLAIRE 1 - Tout espace vectoriel (non nul) de dimension finie admet une base.

COROLLAIRE 2 - Soit E un \mathbb{K} -ev non nul de dimension finie n .

1/ Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.

2/ Toute famille génératrice de E de cardinal n est une base.

2.3. Théorème de la base incomplète.

THÉORÈME 3 - (De la base incomplète). Soit E un \mathbb{K} -ev non nul de dimension finie n . Soient encore :

➤ $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ (avec $p \leq n$) une famille libre de E ;

➤ et $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ une base de E .

Alors il existe $(n - p)$ vecteurs w_1, \dots, w_{n-p} (quitte à renuméroter les vecteurs) de \mathcal{B} tels que la famille $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_{n-p})$ est une base de E .

Interprétation. C'est le théorème de la base extraite “à l'envers” ; l'énoncé ci-dessus signifie que toute famille libre \mathcal{F} peut-être complétée en une base de E . Encore plus précisément, les vecteurs que l'on adjoint à \mathcal{F} pour obtenir une base peuvent être pris (avec précaution, cf exemple suivant la preuve du théorème) dans une base choisie à l'avance.

Exemples. Dans $E = \mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F} = (u(1, 1, 1), v(1, 2, 3))$ est libre. On peut obtenir une base de \mathbb{R}^3 en rajoutant à \mathcal{F} un vecteur de la base canonique. Dans ce cas particulier, la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base avec $w = e_1$ ou e_2 ou e_3 .

MAIS pour la famille $\mathcal{F}' = (u'(1, 1, 0), v'(1, 2, 0))$ (qui est libre aussi), la famille $\mathcal{B}' = (u', v', w')$ n'est une base que pour $w' = e_3$.

COROLLAIRE 3 - Soit E un \mathbb{K} -ev non nul de dimension finie n .

1) Toute famille libre de E possède au plus n éléments.

2) Toute famille libre de E de cardinal n est une base.

Application (tellement classique). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et (P_1, \dots, P_n) une famille échelonnée de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nuls, càd une famille de polynômes non nuls tels que : $\deg(P_1) < \deg(P_2) \dots < \deg(P_n)$. Alors la famille (P_1, \dots, P_n) est libre.

Autrement dit : toute famille échelonnée de polynômes non nuls est libre.

Application. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraire. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $\mathcal{F} = \left((X - \alpha)^k \right)_{k \in [0; n]}$ est libre (car échelonnée) et de cardinal $(n + 1) = \dim \mathbb{R}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

PROPRIÉTÉ 3 - Soit E un \mathbb{K} -ev non nul de dimension finie n , et F un sev de E . Alors :

$$1) \dim F \leq n \qquad 2) \dim F = n \text{ SSI } F = E$$

Exemples d'illustration. Les sev de \mathbb{R}^2 sont $\left\{ \vec{0} \right\}$ (dimension 0), les droites vectorielles $\text{Vect}(v)$ (avec $v \in \mathbb{R}^2$ non nul; dimension 1) et \mathbb{R}^2 (dimension 2).

Dans \mathbb{R}^3 , les sev sont $\left\{ \vec{0} \right\}$ (dimension 0), les droites vectorielles $\text{Vect}(v)$ (avec $v \in \mathbb{R}^3$ non nul; dimension 1), les plans vectoriels $\text{Vect}(u, v)$ (avec u et $v \in \mathbb{R}^3$ non colinéaires; dimension 2) et \mathbb{R}^3 (dimension 3).

Exemple d'application. soit n un entier naturel. L'application linéaire $\varphi : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto (P - P') \in \mathbb{K}_n[X]$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ (autrement écrit, $\varphi \in \text{GL}(\mathbb{K}_n[X])$).

3. DIMENSION D'UNE SOMME DE SEV

PROPRIÉTÉ 4 - Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, et F et G deux sev supplémentaires dans E (ie $E = F \oplus G$). On a : $\dim E = \dim F + \dim G$.

L'énoncé ci-dessous est une conséquence du théorème de la base incomplète.

THÉORÈME 4 - (Existence d'un supplémentaire en dimension finie). Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, et F un sev de E .

Il existe un sev G de E tel que : $E = F \oplus G$.

THÉORÈME 5 - (Des 4 dimensions ou relation de Grassmann). Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, et F et G deux sev de E . Alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Exemple d'application. Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Il est aisé de prouver que $\dim F = 2$, et il est immédiat que $\dim G = 1$. D'après le théorème ci-dessus, il suffit alors de prouver que $F \cap G = \left\{ \vec{0} \right\}$ pour conclure que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ (gain de temps important).

DÉFINITION 7 - Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n . On appelle **hyperplan** de E un sev de E de dimension $n - 1$.

PROPRIÉTÉ 5 - Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension n , H un hyperplan de E et v un vecteur de E tel que $v \notin H$. Alors :

$$E = H \oplus \text{Vect}(v)$$

Exemples d'application.

1/ Dans \mathbb{K}^n (avec $n \geq 2$), on considère $H = \{(x_1, \dots, x_n), x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $D = \text{Vect}((1, \dots, 1))$. On a : $\mathbb{K}^n = H \oplus D$.

2/ Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère $H = \{A \in M_2(\mathbb{R}) / \text{tr}(A) = 0\}$. H est l'hyperplan des matrices de trace nulle, et on a : $M_2(\mathbb{R}) = H \oplus \text{Vect}(M)$ pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ de trace non nulle.

3/ Dans un \mathbb{K} -ev E de dimension $n \geq 2$, l'intersection de deux hyperplans distincts est de dimension $n - 2$.

En effet, d'après la formule des quatre dimensions : $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$.

On a : $H_1 \subset (H_1 + H_2) \subset E$. D'où : $n - 1 \leq \dim(H_1 + H_2) \leq n$.

Supposons que $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$. Alors : $H_1 = H_1 + H_2$ (puisque alors $H_1 \subset (H_1 + H_2)$ et $\dim H_1 = \dim(H_1 + H_2)$). Or par hypothèse, H_1 et H_2 sont distincts, donc il existe $h_2 \in H_2 \setminus H_1$, et donc $H_1 \neq H_1 + H_2$.

Il s'ensuit que : $\dim(H_1 + H_2) = n$. Par conséquent : $n = 2(n - 1) + \dim(H_1 \cap H_2)$, d'où : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

4. COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS UNE BASE, MATRICE DE PASSAGE

4.1. Coordonnées.

THÉORÈME 6 - Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n , et soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E . Alors :

$$\forall V \in E, \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, V = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

DÉFINITION 8 - Les scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ du théorème ci-dessus sont appelés **coordonnées du vecteur V dans la base \mathcal{B}** .

Remarque : le point crucial est de remarquer que les coordonnées d'un vecteur sont relatives à la base choisie.

Exemple. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées du polynôme $P = aX^2 + bX + c$ sont (c, b, a) dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. Les coordonnées de P sont $(P(0), P(1), P(2))$ dans la base $\mathcal{B}' = (L_0, L_1, L_2)$ des polynômes de Lagrange de degré 2 associés aux valeurs 0, 1 et 2. Enfin, d'après la formule de Taylor pour les polynômes, les coordonnées de P sont $(P(\alpha), P'(\alpha), P''(\alpha)/2)$ dans la base $\mathcal{B}'' = (1, X - \alpha, (X - \alpha)^2)$ (pour tout réel α).

4.2. Changement de base et matrice de passage.

DÉFINITION 9 - Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n ($n \neq 0$), soient $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ et $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ deux bases de E .

La **matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'** notée $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ (ou $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$) est la matrice de $M_n(\mathbb{K})$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

les scalaires α_{ij} étant caractérisés par :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, w_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} v_i$$

Traduction : $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est la matrice obtenue en mettant en colonnes les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} (attention à l'ordre!).

PROPRIÉTÉ 6 - (Effet d'un changement de base sur les coordonnées). Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n ($n \neq 0$), soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .

Pour tout vecteur V de E , notons $X_{\mathcal{B}}$ et $X_{\mathcal{B}'}$ les n -uplets de ses coordonnées dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement. On a :

$$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$$

Exemple d'application. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère la famille $\mathcal{B}' = (X^2 - 1, X + 1, X)$.

1/ Montrer que \mathcal{B}' est une base de E .

2/ A l'aide d'une matrice de passage, déterminer les coordonnées de $P = aX^2 + bX + c$ dans la base \mathcal{B}' .

L'énoncé suivant a une importance plus théorique que pratique (on vous demandera souvent de faire un changement de base dans un problème, rarement deux) :

PROPRIÉTÉ 7 - Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n ($n \neq 0$), soient \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' trois bases de E . On a :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$$

La conséquence spectaculaire de cet énoncé étant la propriété (plus pratique que théorique) ci-dessous :

PROPRIÉTÉ 8 - Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n ($n \neq 0$), soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .

Alors $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, et $[P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}]^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

Pour enfoncer le clou : **toute matrice de passage est inversible**

5. CLASSIFICATION DES EV DE DIMENSION FINIE

PROPRIÉTÉ 9 - Soient E et F deux \mathbb{K} -ev, avec E de dimension $n \geq 1$; $\mathcal{B} = (\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}$ une base de E ; et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Enfin on note $\mathcal{F} = (f(\vec{v}_i))_{i \in [1, n]}$. Alors :

1/ [f est injective] \iff [\mathcal{F} est libre]

2/ [f est surjective] \iff [\mathcal{F} est génératrice de F]

3/ [f est un isomorphisme] \iff [\mathcal{F} est une base de F]

COROLLAIRE 4 - Soient E et F deux \mathbb{K} -ev de dimension finie.

Si E et F sont isomorphes, alors $\dim E = \dim F$

La réciproque est vraie, dans le sens rendu plus précis par l'énoncé ci-dessous :

THÉORÈME 7 - (Classification des ev de dimension finie).

Tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .

Interprétation. A isomorphisme près, \mathbb{K}^n est le seul \mathbb{K} -ev de dimension n .

Remarque. Dans le théorème de classification, il est surtout important de retenir l'idée de la preuve. Si E est un ev de dimension n , il admet une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Un isomorphisme $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ peut alors être défini en posant : $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$; l'isomorphisme réciproque φ^{-1} associe à tout vecteur v de E le n -uplet de ses coordonnées dans la base \mathcal{B} .

COROLLAIRE 5 - Deux \mathbb{K} -ev de même dimension sont isomorphes.

Exemple. $S_3(\mathbb{R})$ (le sev des matrices symétriques de $M_3(\mathbb{R})$), $M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_5[X]$ sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels deux à deux isomorphes, tous trois étant isomorphes à \mathbb{R}^6 .