Chapitre 23 — "L'essentiel" sur les probabilités et les variables aléatoires

Préambule. Ce chapitre est consacré aux probabilités ; pour une large partie, il reprend des notions qui vous sont déjà familières depuis le Lycée.

Table des matières

*Tout au long de ce chapitre, on se place dans la situation où l'univers de l'expérience aléatoire est **fini**.*

1. Expérience aléatoire et univers

On donne dans ce premier paragraphe quelques définitions "à la volée".

En premier lieu, on appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on ne peut prévoir le résultat (de façon certaine). Une **issue** (ou **éventualité**) est un résultat possible lors d'une expérience aléatoire. Exemples d'expériences aléatoires : lancer de dé, de pièce, pas de nain parceque c'est interdit, jeux divers et variés (cartes, boules, urnes...), note lors d'une évaluation...

L'**univers** (souvent noté Ω) d'une expérience aléatoire est l'ensemble de ses issues.

Un **évènement** est une partie de l'univers. L'**évènement certain** (*resp.* **impossible**) est Ω (*resp.* $\emptyset$). Un évènement élémentaire est un singleton de l'univers (càd un évènement constitué d'une unique éventualité).

2. Opérations sur les évènements

Définition 1 - Soient A et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ (il revient au même d'écrire : "soient A et B deux évènements lors d'une même expérience aléatoire).

1/ L'évènement $A \cap B$ est l'évènement qui est réalisé SSI A <u>et</u> B le sont ;

2/ L'évènement $A \cup B$ est l'évènement qui est réalisé SSI A <u>ou</u> B l'est.

3/ L'évènement $\overline{A}$ est l'évènement qui est réalisé SSI A ne l'est pas.

Exemples. Lors d'un lancer de dé à 6 faces, on considère les évènements A : "obtenir un résultat pair" et B : "obtenir au moins 5".

Dans cette situation on a : $A = \{2,4,6\}$; $B = \{5,6\}$; $A \cap B = \{6\}$; $A \cup B = \{2,4,5,6\}$; $\overline{A} = \{1,3,5\}$; $\overline{B} = \{1,2,3,4\}$.

Remarque. Ces considérations sur les évènements ne sont finalement, au vocabulaire près, qu'une retraduction des notions introduites lors du chapitre 1 dans le cadre de la théorie des ensembles. On dispose donc déjà d'un nombre impressionnant de propriétés sur les opérations sur les ensembles (distributivités et lois de Morgan notamment). Rappelons-les explicitement.

Propriété 1 - Soient A, B et C trois éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$. On a :

1/ $A \cap \Omega = A\,;\qquad A \cup \overline{A} = \Omega\,;\qquad A \cap \overline{A} = \emptyset$

2/ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3/ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4/ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

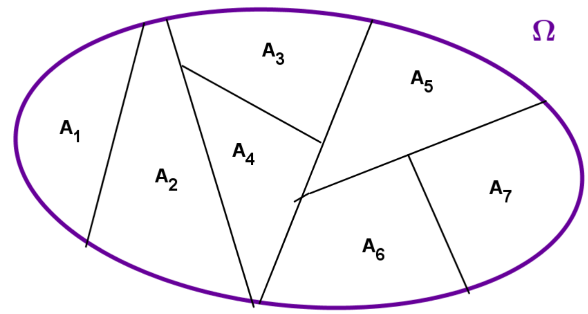
5/ $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Définition 2 - Deux évènements A et B sont **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$.

Exemples. Lors d'un lancer de dé, les évènements “obtenir un résultat pair” et “obtenir 3 ou 5” sont incompatibles.

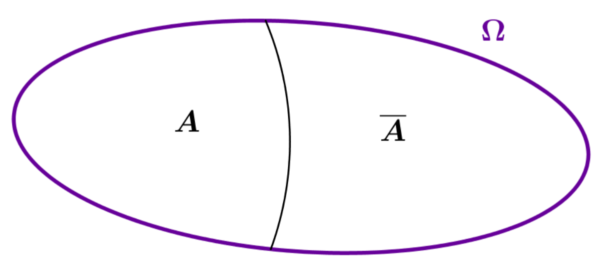
Définition 3 - Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Un **système complet d'évènements** (en abrégé SCE ; on dit aussi **partition**) est une famille $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ d'évènements deux à deux disjoints tels que $\displaystyle\bigcup_{i=1,\ldots,n} A_i = \Omega$.

Illustration. Ci-contre, les évènements $A_1,\ldots,\ A_7$ constituent un système complet d'évènements de l'univers Ω.



Exemple. Lorsque l'expérience aléatoire est un lancer de dé, les évènements $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{4,5\}$ et $A_3 = \{6\}$ constituent un système complet d'évènements.

Exemple fondamental. Pour tout évènement A, la famille $\left(A, \bar{A}\right)$ est un système complet d'évènements, puisque $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (voir illustration ci-contre).



3. Probabilités

3.1. Généralités.

Définition 4 - Une **probabilité** $\mathbb{P}$ sur Ω est une application

$$\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0;1]$$

telle que :

1/ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2/ Si A et B sont deux parties disjointes de Ω, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Exemple. Dans le contexte d'un lancer de pièce, on définit une probabilité sur Ω en posant : $\mathbb{P}(\text{pile}) = 1/5$ et $\mathbb{P}(\text{face}) = 4/5$.

Propriété 2 - **(Propriétés des probabilités)** Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, et soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

1/ Pour tout évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\quad 0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$

2/ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

3/ Pour tout évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\quad \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$

4/ Pour tout couple (A, B) d'évènements de $\mathscr{P}(\Omega)$, $\quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Propriété 3 - **(Croissance)** Pour toute probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{P}(\Omega)$, et pour tout couple (A, B) d'évènements dans Ω, on a :

$$[A \subset B] \Longrightarrow [\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)]$$

Remarque. Une autre observation, qui concerne l'exemple précédant les propriétés cette fois-ci. L'exemple de probabilité donné dans le contexte de l'expérience de pile ou face peut être généralisé à un univers fini. C'est l'objet de la propriété suivante.

Propriété 4 - Soit Ω un univers fini, que l'on se propose de noter $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$, où n désigne un entier naturel non nul (et les x_i les issues de l'expérience aléatoire).

Soit $(p_1, \ldots, p_n)$ un n-uplets de réels tels que :

$$1/ \ \forall i \in [\![1, n]\!], \ p_i \in [0,1] ; \qquad\qquad 2/ \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}(\{x_i\}) = p_i$$

Traduction informelle. On définit de manière unique une probabilité sur un univers fini en choisissant les probabilités de chacun des évènements élémentaires, de telle sorte que la somme de toutes ces probabilités soit égale à 1.

Exemple-clef — Situation d'équiprobabilité. Notons $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, et notons pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

D'après la propriété précédente, on définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{P}(\Omega)$ en posant :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$$

On parle alors d'**équiprobabilité**.

Dans cette situation, on a pour tout évènement A dans Ω :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{card } A}{n}$$ [1]

Pour faire le lien avec une affirmation que vous avez peut-être déjà entendue, cette formule correspond au quotient :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple. Quand on lance un dé non truqué (ou équilibré), on est dans la situation d'équiprobabilité, dans le sens où la probabilité d'obtenir chacune des faces est égal à $1/6$.

3.2. Formule des probabilités totales.

Place maintenant à l'une des propriétés essentielles de ce chapitre de probabilités.

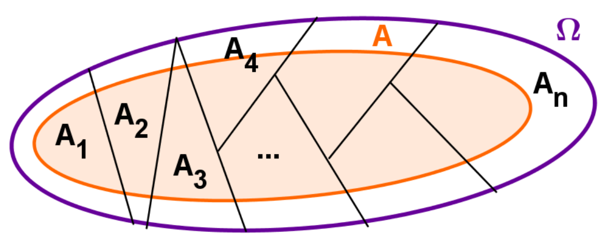
Théorème 1 - (Formule des probabilités totales)

Soit $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ un système complet d'évènements de Ω.

On a :

$$\forall\, A \in \mathscr{P}(\Omega), \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_i)$$

Illustration. Sur la figure ci-contre, on a fait apparaître le fait que la probabilité de l'évènement A est la somme des probabilités des "petits morceaux" qui composent A, càd la somme des probabilités des évènements $A \cap A_1, \ldots, A \cap A_n$.



Corollaire 1 - Soit A un évènement quelconque. On a :

$$\forall\, B \in \mathscr{P}(\Omega), \qquad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}\left(B \cap \overline{A}\right)$$

On renvoie à la prochaine section pour des applications de la FPT.

1. Où card A désigne le **cardinal** de A, c'est-à-dire son nombre d'éléments.

4. Probabilités conditionnelles et évènements indépendants

Définition 5 - Soient A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$. La **probabilité conditionnelle de** B **sachant** A (càd sachant que A est réalisé) est :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarque. Il résulte de la définition que : $\boxed{\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}$.

Propriété 5 - (Propriétés des probabilités conditionnelles) Soit A un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On a :

1/ Pour tout évènement B : $\mathbb{P}_A\left(\bar{B}\right) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.

2/ Pour tout couple (B_1, B_2) d'évènements : $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)$.

Propriété 6 - (Propriétés des probabilités conditionnelles) Soit A un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

L'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

Définition 6 - Deux évènements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Quand tel est le cas, on a : $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Exemples. Lors du lancer d'un dé équilibré, on considère les évènements :

A : "obtenir un résultat pair" B : "obtenir au plus 3" et C : "obtenir au moins 3"

On a : $\mathbb{P}(A \cap C) = 1/3$, $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et $\mathbb{P}(C) = 2/3$. D'où : $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$. Les évènements A et C **sont indépendants**.

On a : $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$, $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et $\mathbb{P}(B) = 1/2$. D'où : $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. Les évènements A et B **ne sont pas indépendants**.

Remarque. Attention !!! **Indépendant $\neq$ Incompatible**

Dans l'exemple précédent, les évènements A et C sont indépendants mais ne sont pas incompatibles. D'une manière générale d'ailleurs, lorsque deux évènements A et B sont incompatibles (càd si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$), ils ne sont pas indépendants dès lors que $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$ sont non nulles.

Théorème 2 - (Formule des probabilités totales, revisitée) Soit $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ un système complet d'évènements de Ω.

On suppose que : $\forall\, i \in [\![\, 1, n \,]\!],\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$.

Alors :

$$\forall\, A \in \mathscr{P}(\Omega), \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque. Cette formule justifie la méthode consistant à calculer des probabilités à l'aide d'un arbre pondéré, où l'on "ajoute les probas correspondant aux différents chemins, et où l'on multiplie les probas correspondant aux branches successives".

Exemple d'application. On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E.

Un joueur fait une partie en deux étapes.

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape.

- ➢ Si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire ;
- ➢ Si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire ;
- ➢ Si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

On définit les événements suivants :

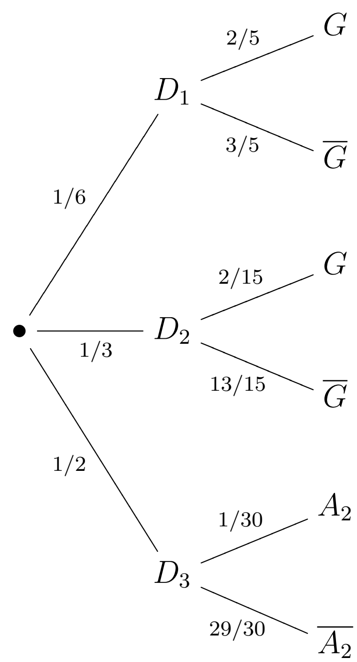
- ➢ D_1 : "le dé indique 1" ; D_2 : "le dé indique 2" ; D_3 : "le dé indique 3" ;
- ➢ G : "la partie est gagnée"

1/ Calculer les probabilités conditionnelles $P_{D_1}(G)$, $P_{D_2}(G)$ et $P_{D_3}(G)$.

2/ Calculer la probabilité que le joueur gagne la partie.

3/ Calculer la probabilité que le joueur gagne la partie s'il obtient un 1 lors du lancer de dé.

Corrigé. Il peut être utile de représenter l'expérience décrite dans l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré (même si ce n'est pas explicitement demandé dans l'énoncé).



1) $P_{D_1}(G) = \dfrac{4}{10}$ soit $\boxed{P_{D_1}(G) = \dfrac{2}{5}}$; $P_{D_2}(G) = \dfrac{\dbinom{4}{2}}{\dbinom{10}{2}} = \dfrac{6}{45}$ soit $\boxed{P_{D_2}(G) = \dfrac{2}{15}}$; enfin $P_{D_3}(G) = \dfrac{\dbinom{4}{3}}{\dbinom{10}{3}} = \dfrac{4}{120}$ d'où $\boxed{P_{D_3}(G) = \dfrac{1}{30}}$.

Les évènements D_1, D_2 et D_3 constituent une partition de l'univers de cette expérience. La formule des probabilités totales donne alors : $P(G) = P(G \cap D_1) + P(G \cap D_2) + P(G \cap D_3) = P_{D_1}(G) \times P(D_1) + P_{D_2}(G) \times P(D_2) + P_{D_3}(G) \times P(D_3)$. Par conséquent :

$P(G) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{30} = \dfrac{2}{30} + \dfrac{2}{45} + \dfrac{1}{60} = \dfrac{12+8+3}{180}$ d'où

$$\boxed{P(G) = \dfrac{23}{180}}$$

3) La probabilité demandée est $P_G(D_1)$. Or : $P_G(D_1) = \dfrac{P(G \cap D_1)}{P(G)} = \dfrac{\left(\dfrac{2}{30}\right)}{\left(\dfrac{23}{180}\right)}$ soit $\boxed{P_G(D_1) = \dfrac{12}{23}}$.

➢ Pour finir, on dispose également d'un corollaire “bis” de la formule des probabilités totales, que voici.

Corollaire 2 - Soient B un évènement dans Ω, tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 1$.

Alors :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\bar{B}}(A) \times \mathbb{P}\left(\bar{B}\right)$$

On peut déduire de la formule des probabilités totales l'énoncé suivant.

Propriété 7 - (l'une des formules de Bayes) Soit $(A_j)_{j=1,\dots,n}$ un système complet d'évènements.

On suppose que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(A_j) \neq 0$.

Alors pour tout évènement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{A_j}(B) \times \mathbb{P}(A_j)}$$

5. Variables aléatoires réelles

5.1. Généralités.

Définition 7 - Un **espace probabilisé** est un couple $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est un univers et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

Exemple. Un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ muni de l'équiprobabilité est un exemple d'espace probabilisé.

Définition 8 - Une **variable aléatoire réelle** (en abrégé **VAR**) X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemples.

1/ On note X_1 le nombre de bonnes réponses obtenues par un étudiant répondant au hasard aux 10 questions d'un QCM. Dans ce cadre, X_1 est une VAR.

2/ On note X_2 le nombre de QCM nécessaires à l'étudiant précédemment évoqué pour qu'il fasse un “sans faute”. X_2 est un autre exemple de VAR.

Remarque. Lorsque X est une VAR, $\boxed{X(\Omega)}$ désigne l'ensemble des valeurs prises par l'application X.

Exemples. En reprenant le contexte des exemples précédents, on a :

$$X_1(\Omega) = [\![0, 10]\!] \qquad \text{et} \qquad X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

5.2. Espérance et variance d'une VAR.

Définition 9 - Soit X une VAR. L'**espérance mathématique** de X, notée $E(X)$ est le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(\{\omega\}) \ \left(\text{ou } E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(X = \omega)\right)$$

Remarque. Dans le cas où Ω est fini (càd dans le seul cas que nous étudierons cette année), la somme de la définition ci-dessus comporte un nombre fini de termes et elle est donc bien définie (ouf !).

En outre, on peut noter $x_1,\ldots, x_n$ les différentes valeurs prises par X, et $p_1,\ldots, p_n$ les probabilités correspondantes. Avec ces notations, l'espérance de X est le réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Remarque. On dit souvent espérance (tout court) pour désigner l'espérance mathématique de X. De plus, l'espérance est également appelée **valeur moyenne** de X.

Définition 10 - Soit X une VAR. La **variance de** X est le réel noté $V(X)$ et défini en posant :

$$V(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \left(X(\omega) - E(X)\right)^2 \ \left(\text{ou } V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 p_i\right)$$

5.3. **Propriétés de l'espérance et la variance.**

Propriété 8 - Soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors :

$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ E\,(aX+b) = aE\,(X) + b$$

Soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, et soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'application composée $f \circ X$ est définie sur Ω, et à valeurs réelles. A ce titre, $f \circ X$ est une VAR, que l'on note parfois simplement $f(X)$.

Exemple. On reprend l'exemple donné plus haut : un joueur lance une pièce truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit égale à p (avec $p \in\ [0,1]$)...

Considérons par exemple pour f la fonction carrée. Dans ce cas : $f(X) = X^2$ est la VAR qui peut prend comme valeurs 9 et 100, avec les probabilités respectives $(1-p)$ et p.

Théorème 3 - (Formule de transfert). Soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, et soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

On a :

$$E\,(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathbb{P}\,(X = x_i)$$

Propriété 9 - Soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors :

$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ V\,(aX+b) = a^2 V\,(X)$$

Théorème 4 - (Formule de Koenig-Huygens). Avec les mêmes notations que depuis le début de ce paragraphe :

$$V\,(X) = E\,(X^2) - [E\,(X)]^2$$

Propriété 10 - (Inégalité de Markov). Soit X une VAR positive. On a :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+,\ a\mathbb{P}\,(X \geqslant a) \leqslant E\,(X)$$

Théorème 5 - (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev Soit X une VAR. On a :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\,(|X - E\,(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V\,(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque. Finalement, l'inégalité de Markov ne "sert essentiellement qu'à" démontrer celle de Bienaymé-Tchebychev. Cette dernière a une signification à la fois profonde et très intuitive : la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs éloignées de sa moyenne est d'autant plus faible que cet éloignement est grand.

6. Variables aléatoires réelles : lois usuelles

Remarque préliminaire. Soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

Déterminer la **loi (de probabilité)** de X, c'est déterminer :

- ➢ $X(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X
- ➢ et pour chaque $x \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$

Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini (càd encore une fois le seul cas étudié cette année), on peut noter comme d'habitude $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Déterminer la loi de X revient donc essentiellement à remplir un tableau comme ci-dessous :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

En pratique, on ne présentera néanmoins la loi d'une VAR sous cette forme que lorsque le nombre de valeurs prises par X est connu et "petit". Dans les autres cas, on explicitera la loi en décrivant donc $X(\Omega)$, et en précisant :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \cdots$$

6.1. **Loi uniforme.**

Définition 11 - Soient m et n deux entiers naturels, avec $n < m$.

Une VAR X suit la **loi uniforme sur** $[\![n, m]\!]$ si X peut prendre toutes les valeurs de $[\![n, m]\!]$ avec la probabilité $1/(m - n + 1)$.

Pour insister sur ce que l'on remarqué en préliminaire, une VAR X définie sur un univers Ω suit la loi uniforme sur $[\![n, m]\!]$ lorsque :

- ➢ $X(\Omega) = [\![n, m]\!]$
- ➢ $\forall k \in [\![n, m]\!],\ P(X = k) = \dfrac{1}{m - n + 1}$

Exemple. Lors d'un lancer de dé bien équilibré, la VAR X égale au numéro de la face obtenue suit une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

Propriété 11 - Si X suit la loi uniforme sur $[\![n, m]\!]$, alors :

$$E(X) = \frac{n + m}{2}$$

6.2. **Loi de Bernoulli.**

Définition 12 - Une VAR X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p si X peut prendre les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives p et $1-p$.

Pour insister une nouvelle fois sur ce que l'on remarqué en préliminaire, une VAR X définie sur un univers Ω suit la loi de Bernoulli de paramètre p lorsque :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

Exemple. Lors d'un lancer d'une pièce de monnaie truquée de telle sorte que l'on obtienne pile avec une probabilité égale à p, on note X la VAR qui vaut 1 si l'obtient pile (succès) et face sinon (échec). La VAR X suit alors la loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété 12 - Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

$$E(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p)$$

6.3. **Loi binomiale.**

Définition 13 - Soient n un entier naturel et p un réel de $[0;1]$.
Une VAR X suit la **loi binomiale de taille** n **et de paramètre** p (X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$) si X est la somme de n VAR indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.

Il revient alors au même de dire que X **compte** le nombre de succès au cours de n expériences **indépendantes** ne pouvant conduire qu'à **deux issues** (on dit aussi n **épreuves de Bernoulli**) : "succès" avec la probabilité p, ou "échec" avec la probabilité $(1-p)$.

Si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors par définition : $X(\Omega) = [\![0; n]\!]$ (puisque le nombre de succès au cours de n épreuves de Bernoulli indépendantes est un entier compris entre 0 et n). Pour décrire la loi de X, il reste à préciser les probabilités $\mathbb{P}(X=k)$ pour tout entier k compris entre 0 et n. C'est l'objet de l'énoncé ci-dessous.

Théorème 6 - Si X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$ alors

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Observation rassurante. Dans ce contexte, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$ comme conséquence du binôme de Newton.

En résumé :

Une VAR X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$ si et seulement si :

- ➢ $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- ➢ $\forall k \in [\![0; n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Théorème 7 - (Espérance et variance de la loi binomiale) Si X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p, alors :

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p) = npq \text{ (avec } q = 1-p\text{)}.$$

Exemples de questions "amusantes" sur la loi binomiale.

Exercice 1 - Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = n - X$?

Exercice 2 - Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0;1[$. Pour quelle valeur de k, la probabilité $p_k = P(X = k)$ est-elle maximale ?

Exercice 3 - Un archer tire sur n cibles. A chaque tir, il a la probabilité p de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants. Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet. L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchées lors de cette tentative. Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.