# Exercices 22 — Espaces vectoriels de dimension finie

## Familles libres, bases

**Exercice 1. —** Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille est libre ou liée.

1/ $E = \mathbb{R}^2$ ; $\quad \mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

2/ $E = \mathbb{R}^2$ ; $\quad \mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3/ $E = \mathbb{R}^2$ ; $\quad \mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

4/ $E = \mathbb{R}_2[X]$ ; $\quad \mathscr{F} = \left\{ 1, 3X-4, 2X^2 - X + 1 \right\}$

5/ $E = \mathbb{R}_2[X]$ ; $\quad \mathscr{F} = \left\{ X, X+1, X^2 \right\}$

6/ $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ; $\quad \mathscr{F} = \{ \mathrm{I}_2, E_{11}, E_{22} - E_{11} \}$

7/ $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ; $\quad \mathscr{F} = \{ \sin, \cos \}$

8/ $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ; $\quad \mathscr{F} = \{ \exp, \mathrm{ch}, \mathrm{sh} \}$

**Exercice 2. — (Dans $\mathbb{K}[X]$).** Déterminer si chacune des familles est libre ou liée.

1/ $\mathscr{F}_1 = \left\{ 1, X-1, X^2 - X \right\}$
2/ $\mathscr{F}_2 = \left\{ 2X+1, X^2 + X, 2X^2 - 1 \right\}$
3/ $\mathscr{F}_3 = \left\{ X^2, X^2 - X, X^2 - 2X \right\}$
4/ $\mathscr{F}_4 = \{ L_1, L_2, L_3, L_4 \}$ où les $L_i$ sont les polynômes (de degré 3) d'interpolation de Lagrange associés aux valeurs 1, 2, 3 et 4.

**Exercice 3. — (Familles échelonnée de polynômes).** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans $\mathbb{K}[X]$, on considère $n$ polynômes $P_1$,…, $P_n$ tous non nuls. On suppose que :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$$

Montrer que la famille $\mathscr{F} = (P_1, \cdots, P_n)$ est libre.

*On prouve ainsi l'énoncé :*

***"Toute famille échelonnée de polynômes est libre"***

**Exercice 4. — (Une famille libre arbitrairement grande dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).** Soient $n \geqslant 1$ un entier naturel, et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $n$ réels distincts ; on suppose $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.
On considère la famille $F_n = (f_k : x \longmapsto e^{\alpha_k x},\ k \in [\![ 1, n ]\!])$. Montrer que $F_n$ est une famille libre de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Exercice 5. — (Une autre famille libre arbitrairement grande dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).** Soient $n \geqslant 1$ un entier naturel.
On considère la famille $F_n = \left( \sin, \sin^2, \ldots, \sin^n \right)$. Montrer que $F_n$ est une famille libre de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

## Bases, dimensions

**Exercice 6. —** Dans chacun des cas suivants, on demande de déterminer une base du sev $F$, et d'en déduire la dimension de $F$.

1/ $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0 \right\}$

2/ $F = \{ P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0 \}$

3/ $F = \{ P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(2) = 0 \}$

4/ Le sev $F$ des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$

5/ Le sev $F$ des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$

6/ Le sev $F$ des fonctions $f$ de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle : $\quad y'' - 6y' + 8y = 0$

7/ $F = \mathrm{im}\rho$ avec $\quad \rho : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3$

**Exercice 7. — (Dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$).** Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants, et en déduire la dimension :

1/ $F_1 = \left\{ A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ A^T = A \right\}$.

2/ $F_2 = \left\{ A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ A^T = -A \right\}$.

3/ $F_3 = \left\{ A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ A^T = A \right\}$.

4/ $F_4 = \left\{ A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ A^T = -A \right\}$.

5/ $F_5 = \{ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ A \text{ diagonale} \}$.

6/ $F_6 = \{ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ A \text{ est de trace nulle} \}$.

**Exercice 8. —** On considère la famille $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, où l'on a posé :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

**Exercice 9. —** Dans cet exercice, on note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Par ailleurs, on définit sur $\mathbb{R}$ trois fonctions $g_1$, $g_2$ et $g_3$ en posant :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{2x}\,; \qquad g_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \cos\left(x\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \sin\left(x\sqrt{3}\right)$$

Enfin on note $F$ le sev de $E$ engendré par les fonctions $g_i$ définies ci-dessus, càd :

$$F = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2, g_3)$$

Montrer que la famille $\mathscr{F} = \{g_1, g_2, g_3\}$ est une base de $F$.

**Exercice 10. — (Une base classique de $\mathbb{K}_n[X]$).** Soient $n$ un entier naturel non nul, et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire quelconque.

On considère la famille

$$\mathscr{B} = \left\{ 1, X - \alpha, (X - \alpha)^2, \ldots, (X - \alpha)^n \right\}$$

On se propose de prouver de deux manières différentes que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1/ Justifier que $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2/ Justifier que $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

**Exercice 11. — (Une autre base classique de $\mathbb{K}_n[X]$ — Polynômes interpolateurs de Lagrange).** Soit $n$ un entier naturel non nul.

On considère $(n+1)$ scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts.

On note $L_0, \ldots, L_n$ les $(n+1)$ polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

1/ Question de cours : rappeler l'expression du polynôme $L_k$ pour tout $k \in [\![ 0, n ]\!]$.

2/ Etablir que la famille $\mathscr{B} = \{L_0, \ldots, L_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

**Exercice 12. —** Dans cette partie, $E$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels.

On pose $F = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2)$, et on note $G$ le sev des matrices de $E$ de trace nulle.

1/ Déterminer la dimension de $F$ et la dimension de $G$.

2/ Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

**Exercice 13.** — Dans $E = \mathbb{K}_2[X]$ on considère les sev
$$F = \text{Vect}\left(X^2 + X + 1,\ 5X + 2\right) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(X^2 - X).$$
On pourra noter $P_1 = X^2 + X + 1$ ; $P_2 = 5X + 2$ ; $P_3 = X^2 - X$.

1/ Etablir que : $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{K}_2[X]}\right\}$.

2/ En déduire que : $\quad E = F \bigoplus G$.

3/ Justifier que $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

**Exercice 14.** — Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère la partie $F$ constituée des polynômes $P$ tels que $P(1) = P(-1)$.

1/ Montrer que $F$ est un sev de $E$, en déterminer une base, et en déduire la dimension de $F$.

2/ Soit $G = \text{Vect}(X)$. Montrer que : $E = F \bigoplus G$.

## Dimension et applications linéaires

**Exercice 15.** — On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie en posant :
$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + y + t \\ x + z - t \end{pmatrix}$$
On admet que $f$ est linéaire.

Déterminer le noyau et l'image de $f$, en précisant pour chacun une base et la dimension.

**Exercice 16.** — On considère l'application $\varphi : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_3[X]$ définie en posant :
$$\forall\, P \in \mathbb{K}_3[X],\ \varphi(P) = P\,(X + 1) - P\,(X)$$

1/ Montrer que $\varphi$ est linéaire.

2/ Déterminer $\ker\varphi$ et $\text{im}\,\varphi$. Préciser une base pour chacun des sev $\ker\varphi$ et $\text{im}\,\varphi$, en déduire leur dimension.

**Exercice 17.** — **(Transport de bases).** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-ev, $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme de $E$ dans $F$, et $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ une base de $E$.

On note $\varphi(\mathscr{B}) = \{\varphi\left(\overrightarrow{v_1}\right), \ldots, \varphi\left(\overrightarrow{v_1}\right)\}$ l'image de $\mathscr{B}$ par $\varphi$. Montrer que $\varphi(\mathscr{B})$ est une base de $F$.

*On prouve ainsi l'énoncé :*

***"L'image d'une base par un isomorphisme est une base"***

**Exercice 18.** — **(Conséquence du "transport de bases").** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-ev.

On suppose que $\dim(E) = n$, et que $E$ et $F$ sont isomorphes (càd qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ de $E$ dans $F$). Etablir que $\dim(F) = n$

*On prouve ainsi l'énoncé :*

***"Deux ev de dimension finie isomorphes ont la même dimension."***

## Coordonnées et matrices de passage

**Exercice 19.** — **(Coordonnées dans $\mathbb{R}_3[X]$).**

Quelles sont les coordonnées de $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$ dans :

1/ la base canonique $\mathscr{B}_1 = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ ?

2/ la base $\mathscr{B}_2 = \left(1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ ?

3/ la base $\mathscr{B}_3 = (L_0, L_1, L_2, L_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, où les $L_1$ désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux réels 0, 1, 2 et 3 ?

**Exercice 20.** — **(Matrice de passage)**. On considère la famille $\mathrm{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ avec :

$$P_1 = X^2 - 1\,; \qquad P_2 = (X-1)^2\,; \qquad P_3 = (X+1)^2$$

1/ Etablir que la famille $\mathrm{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2/ Ecrire la matrice de passage $P$ de la base B à la base $\mathrm{B}'$.

3/ Après avoir brièvement justifié que $P$ est inversible, calculer $P^{-1}$.*

**Exercice 21.** — Dans cet exercice, on note $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients réels.

On note $\mathbf{B} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ la base canonique de $E$ ; et $\mathrm{I}_2$ la matrice identité de $E$.

Enfin, on note :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**1**/ On considère le sev :

$$F = \mathrm{Vect}\,(M_1, M_2, M_3)$$

Montrer que la famille $\mathbf{B}_1 = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $F$.

**2**/ On pose : $G = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2)$. Etablir que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

**3**/ On introduit à présent la famille :

$$\mathbf{B'} = \{M_1, M_2, M_3, \mathrm{I}_2\}$$

Etablir que **B'** est une base de $E$.

**4**/ Ecrire la matrice de passage $P$ de la base **B** à la base **B'**.

**5**/ Donner les coordonnées de la matrice $\mathbf{E}_{11}$ dans la base **B**, ainsi que dans la base **B'**.

**6**/ On note $p_F$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$. Déterminer $p_F(\mathbf{E}_{11})$, $p_F(\mathrm{I}_2)$ et $p_F\left(\mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{12} + \mathbf{E}_{21}\right)$

## Extraits de DS, de CB, de Concours

**Exercice 22.** — Soit $n$ un entier naturel non nul. Montrer que l'endomorphisme

$$f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$$
$$P \longmapsto P - P'$$

est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

**Exercice 23.** — Soit $n$ un entier naturel non nul. Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$
$$P \longmapsto P + XP''$$

est bijective (on pourra admettre que $f$ est linéaire).

*. On pourra vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{4}R$, où $R \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice dont les coefficients appartiennent à $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

**EXERCICE 24.** — Montrer que la famille $\mathbf{B}_1 = \left\{ (X+1)^2, X^2-1, (X-1)^2 \right\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

**EXERCICE 25.** — Soit $n$ un entier naturel. Pour tout entier $k \in [\![ 0, n ]\!]$, on pose : $Q_k = (X-1)^k (X+1)^{n-k}$

1/ Etablir que :

$$\forall\, j \in [\![ 0, n ]\!], \qquad \frac{1}{2^{n-j}} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k} Q_{k+j} = (X-1)^j$$

2/ Justifier brièvement que la famille $\mathbf{B}_0 = \left\{ (X-1)^j,\ j \in [\![ 0, n ]\!] \right\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3/ Déduire de ce qui précède que la famille $\mathbf{B}_1 = \{ Q_k,\ k \in [\![ 0, n ]\!] \}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**EXERCICE 26.** — **(Racines carrées de l'identité de $\mathbb{K}_2[X]$)** Dans cet exercice, $\mathbf{E}_1$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathbf{B} = \left\{ 1, X, X^2 \right\}$ la base canonique de $\mathbf{E}_1$.

On note : $P_1 = X(X-1)$ ; $P_2 = X(X-2)$ ; et $P_3 = (X-1)(X-2)$.

Enfin, on note : $F = \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(P_3)$.

**1**/ Etablir que **B'** $= \{ P_1, P_2, P_3 \}$ est une base de $\mathbf{E}_1$.

**2**/ Etablir que : $\mathbf{E}_1 = F \bigoplus G$.

**3**/ Ecrire la matrice de passage $P_{\mathbf{BB'}}$ de la base **B** à la base **B'**.

**4**/ **Etude d'une symétrie**. On note $s_F$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$. On rappelle que $s_F$ est un endomorphisme de $\mathbf{E}_1$.

**a**/ Etablir que : $(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E}_1)}$

**b**/ Justifier brièvement que : $\forall\, Q \in \mathbf{E}_1,\ \exists\,!\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, \quad Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

**c**/ Calculer $s_F(P_1)$, $s_F(P_2)$ et $s_F(P_3)$.

**d**/ Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$. A l'aide de la question précédente, calculer : $s_F\,(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3)$.

**e**/ Montrer que $\ker\,(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1})$ est un sev de $\mathbf{E}_1$, de dimension 2 ; et que $\ker\,(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1})$ est un sev de $\mathbf{E}_1$, de dimension 1.

*Remarque : à l'issue de cet exo, on peut observer que :* $\mathbf{E}_1 = \ker\,(s_F + id_{\mathbf{E}_1}) \bigoplus \ker\,(s_F - id_{\mathbf{E}_1})$

**EXERCICE 27.** — **(Racines cubiques de l'identité de $\mathbb{C}_2[X]$)** Dans cet exercice, on note $\mathbf{E}_2 = \mathbb{C}_2[X]$, et on considère l'application

$$f : \mathbf{E}_2 \longrightarrow \mathbf{E}_2 \qquad \text{avec } \mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$$

$$aX^2 + bX + c \longmapsto a\mathrm{j}^2 X^2 + b\mathrm{j} X + c$$

Il revient au même de dire que l'application $f$ envoie le polynôme $P(X)$ sur le polynôme $P\,(\mathrm{j}X)$.

**1**/ Etablir que $f$ est un endomorphisme de $\mathbf{E}_2$.

**2**/ Etablir que : $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}$

**3**/ Montrer que $\ker\,(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2})$ est le sev de $\mathbf{E}_2$ constitué des polynômes constants.

**4**/ Pour tout $P \in \mathbf{E}_2$, calculer $f^2(P) + f(P) + P$. En déduire que : $\ker\left(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$.

*Remarque : à l'issue de cet exo, on peut observer que :* $\mathbf{E}_2 = \ker\left(f^2 + f + id_{\mathbf{E}_2}\right) \bigoplus \ker\,(f - id_{\mathbf{E}_2})$