

FAMILLES LIBRES, BASES

EXERCICE 1. — Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille est libre ou liée.

$$1/ E = \mathbb{R}^2; \quad \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Supposons qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Conclusion. La famille \mathcal{F} est une famille libre de \mathbb{R}^2 .

Synonyme : les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

$$2/ E = \mathbb{R}^2; \quad \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion. La famille \mathcal{F} est une famille liée de \mathbb{R}^2 .

Synonyme : les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas linéairement indépendants, ou sont linéairement dépendants.

$$3/ E = \mathbb{R}^2; \quad \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{On a : } \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion. La famille \mathcal{F} est une famille liée de \mathbb{R}^2 .

Synonyme : les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ne sont pas linéairement indépendants...

$$4/ E = \mathbb{R}_2[X]; \quad \mathcal{F} = \{1, 3X - 4, 2X^2 - X + 1\}$$

Supposons qu'il existe trois réels a , b et c tels que :

$$a \times 1 + b(3X - 4) + c(2X^2 - X + 1) = 0$$

Par identification des coefs de X^2 , on obtient : $c = 0$.

Par identification des coefs constants, on obtient : $a = 0$.

Il est alors trivial que $b = 0$.

Ainsi :

$$[a \times 1 + b(3X - 4) + c(2X^2 - X + 1) = 0] \implies [a = b = c = 0]$$

Conclusion. La famille \mathcal{F} est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

Synonyme. Les polynômes 1 , $3X - 4$ et $2X^2 - X + 1$ sont linéairement indépendants.

$$5/ E = \mathbb{R}_2[X]; \quad \mathcal{F} = \{X, X + 1, X^2\}$$

Supposons qu'il existe trois réels a , b et c tels que :

$$aX + b(X + 1) + cX^2 = 0$$

Par identification des coefs de X^2 , on obtient : $c = 0$.

Par identification des coefs constants, on obtient : $b = 0$.

Il est alors trivial que $a = 0$.

Ainsi :

$$[aX + b(X + 1) + cX^2 = 0] \implies [a = b = c = 0]$$

Conclusion. La famille \mathcal{F} est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

Synonyme. Les polynômes X , $X + 1$ et X^2 sont linéairement indépendants.

$$6/ E = M_2(\mathbb{R}); \quad \mathcal{F} = \{I_2, E_{11}, E_{22} - E_{11}\}$$

On a :

$$I_2 = (E_{22} - E_{11}) + 2E_{11}$$

Conclusion. La famille \mathcal{F} est une famille liée de $M_2(\mathbb{R})$.

$$7/ E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \quad \mathcal{F} = \{\sin, \cos\}$$

Supposons qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\alpha \cos + \beta \sin = 0$$

Alors : $\alpha = 0$ (par évaluation en 0) et $\beta = 0$ (par évaluation en $\pi/2$).

Conclusion. La famille \mathcal{F} est une famille libre de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$8/ E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \quad \mathcal{F} = \{\exp, \text{ch}, \text{sh}\}$$

On a : $\exp = \text{ch} + \text{sh}$.

Conclusion. La famille \mathcal{F} est une famille liée de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

EXERCICE 2. — (Familles libres et liées dans $\mathbb{K}[X]$). Déterminer si chacune des familles est libre ou liée.

$$1/ \text{Considérons } \mathcal{F}_1 = (1, X - 1, X^2 - X).$$

Supposons qu'il existe trois réels a , b et c tels que :

$$a + b(X - 1) + c(X^2 - X) = 0$$

Par identification, on obtient successivement $c = 0$ (comparaison des termes en X^2), $b = 0$ (comparaison des termes en X) puis $a = 0$ (immédiat).

Ainsi :

$$[a + b(X - 1) + c(X^2 - X) = 0] \implies [a = b = c = 0]$$

Conclusion. La famille $\mathcal{F}_1 = (1, X - 1, X^2 - X)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

2/ Considérons $\mathcal{F}_2 = (2X + 1, X^2 + X, 2X^2 - 1)$.

Supposons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$a(2X + 1) + b(X^2 + X) + c(2X^2 - 1) = 0$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} b + 2c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -2a \\ c = a \end{cases}$$

En particulier, si l'on choisit $a = 1$, on a : $b = -2$ et $c = 1$. D'où :

$$(2X + 1) - 2(X^2 + X) + (2X^2 - 1) = 0$$

Conclusion. La famille $\mathcal{F}_2 = (2X + 1, X^2 + X, 2X^2 - 1)$ est une famille liée de $\mathbb{K}[X]$.

3/ Considérons $\mathcal{F}_3 = (X^2, X^2 - X, X^2 - 2X)$.

Supposons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$a(X^2) + b(X^2 - X) + c(X^2 - 2X) = 0$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ b = -2c \end{cases}$$

En particulier, si l'on choisit $c = 1$, on a : $b = -2$ et $a = 1$. D'où :

$$X^2 - 2(X^2 - X) + (X^2 - 2X) = 0$$

Conclusion. La famille $\mathcal{F}_3 = (X^2, X^2 - X, X^2 - 2X)$ est une famille liée de $\mathbb{K}[X]$.

4/ Considérons $\mathcal{F}_4 = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ où les L_i sont les polynômes (de degré 3) d'interpolation de Lagrange associés aux valeurs 1, 2, 3 et 4.

Supposons qu'il existe quatre réels $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ tels que :

$$\underbrace{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_4}_{=P} = 0$$

Par évaluation en 1, on obtient : $\alpha_1 = 0$ (puisque $P(1) = \alpha_1$).

Par évaluation en 2, on obtient : $\alpha_2 = 0$ (puisque $P(2) = \alpha_2$).

Par évaluation en 3, on obtient : $\alpha_3 = 0$ (puisque $P(3) = \alpha_3$).

Par évaluation en 4, on obtient : $\alpha_4 = 0$ (puisque $P(4) = \alpha_4$).

Ainsi :

$$[\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_4 = 0] \implies [\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0]$$

Conclusion. La famille $\mathcal{F}_4 = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

EXERCICE 3. — (Familles échelonnées de polynômes). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans $\mathbb{K}[X]$, on considère n polynômes P_1, \dots, P_n tous non nuls.

On suppose que :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$$

Montrer que la famille $\mathcal{F} = (P_1, \dots, P_n)$ est libre.

On prouve ainsi l'énoncé :

“Toute famille échelonnée de polynômes est libre”

Cf cours.

EXERCICE 4. — (*) (Une famille libre arbitrairement grande dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Soient $n \geq 1$ un entier naturel, et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n réels distincts ; on suppose $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

On considère la famille $F_n = (f_k : x \mapsto e^{\alpha_k x}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket)$. Montrer que F_n est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

S'inspirer de l'exo précédent, et utiliser la limite en ∞ ...

EXERCICE 5. — (Une autre famille libre arbitrairement grande dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Soient $n \geq 1$ un entier naturel.

On considère la famille $F_n = (\sin, \sin^2, \dots, \sin^n)$. Montrer que F_n est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

S'inspirer de l'exo précédent, et utiliser cette fois-ci les développements limités en 0 (cf cours).

BASES, DIMENSIONS

EXERCICE 6. — Dans chacun des cas suivants, on demande de déterminer une base du sev F , et d'en déduire la dimension de F .

$$1/ F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + 2y - 3z = 0 \right\}$$

Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$v \in F \iff x + 2y - 3z = 0 \iff x = 3z - 2y \iff v = (3z - 2y, y, z)$$

Ainsi :

$$v \in F \iff \exists (y, z) \in \mathbb{R}^2, v = y(-2, 1, 0) + z(3, 0, 1) \iff v \in \text{Vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1))$$

La famille $\mathcal{B} = \{(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ est génératrice de F ; et elle est clairement libre (car de cardinal 2, et constituée de 2 vecteurs non colinéaires). C'est donc une base de F .

Conclusion. La famille $\mathcal{B} = \{(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ est une base de F . Donc : $\dim F = 2$.

$$2/ F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = 0\}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$P \in F \iff P(0) = 0 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = aX^2 + bX \iff P \in \text{Vect}(X, X^2)$$

La famille $\mathcal{B} = \{X, X^2\}$ est génératrice de F ; et elle est clairement libre (car de cardinal 2, et constituée de 2 polynômes non colinéaires). C'est donc une base de F .

Conclusion. La famille $\mathcal{B} = \{X, X^2\}$ est une base de F . Donc : $\dim F = 2$.

$$3/ F = \{P \in \mathbb{K}_3[X], P(2) = 0\}$$

Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{K}_3[X]$, on a :

$$P \in F \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, P = a(X - 2) + b(X - 2)^2 + c(X - 2)^3 \iff P \in \text{Vect}(X - 2, (X - 2)^2, (X - 2)^3)$$

La famille $\mathcal{B} = \{X - 2, (X - 2)^2, (X - 2)^3\}$ est génératrice de F .

Justifions que \mathcal{B} est libre. Supposons qu'il existe 3 réels a, b et c tels que :

$$a(X - 2) + b(X - 2)^2 + c(X - 2)^3 = 0_{\mathbb{K}_3[X]}$$

Alors : $c(X - 2)^3 = -a(X - 2) - b(X - 2)^2$.

Si $c \neq 0$, alors le terme de gauche est un polynôme de degré 3, et celui de droite un polynôme de degré au plus 2 : contradiction.

Donc $c = 0$. Donc : $a(X - 2) + b(X - 2)^2 = 0_{\mathbb{K}_3[X]}$. Donc : $a(X - 2) = -b(X - 2)^2$.

Si $b \neq 0$, alors le terme de droite est un polynôme de degré 2, et celui de gauche un polynôme de degré au plus 1 : contradiction.

Donc $b = 0$. Donc : $a(X - 2) = 0_{\mathbb{K}_3[X]}$. Donc : $a = 0$.

En résumé, on a établi l'implication :

$$[a(X - 2) + b(X - 2)^2 + c(X - 2)^3 = 0_{\mathbb{K}_3[X]}] \implies [a = b = c = 0]$$

Ce qui signifie que la famille $\mathcal{B} = \{X - 2, (X - 2)^2, (X - 2)^3\}$ est libre. Puisqu'elle est aussi génératrice de F , c'est une base de F .

Conclusion. La famille $\mathcal{B} = \{X - 2, (X - 2)^2, (X - 2)^3\}$ est une base de F . Donc : $\dim F = 3$.

4/ Le sev F des matrices triangulaires supérieures de $M_2(\mathbb{K})$

Soit $M \in M_2(\mathbb{K})$. On a :

$$M \in F \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, M = aE_{11} + bE_{12} + cE_{22}$$

Ainsi :

$$M \in F \iff M \in \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{22})$$

La famille $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ est génératrice de F .

Justifions que \mathcal{B} est libre. Supposons qu'il existe 3 réels a, b et c tels que :

$$aE_{11} + bE_{12} + cE_{22} = 0_{M_2(\mathbb{K})}$$

Alors : $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'où : $a = b = c = 0$.

En résumé, on a établi l'implication :

$$[aE_{11} + bE_{12} + cE_{22} = 0_{M_2(\mathbb{K})}] \implies [a = b = c = 0]$$

Ce qui signifie que la famille $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ est libre. Puisqu'elle est aussi génératrice de F , c'est une base de F .

Conclusion. La famille $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ est une base de F . Donc : $\dim F = 3$.

5/ Le sev F des matrices antisymétriques de $M_3(\mathbb{K})$

Fait en classe.

Conclusion. La famille $\mathcal{B} = \{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}$ est une base de F . Donc : $\dim F = 3$.

6/ Le sev F des fonctions f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 8y = 0$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a :

$$f \in F \iff y'' - 6y' + 8y = 0 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, f = af_1 + bf_2$$

avec f_1 et f_2 définies en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{2x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{4x}$$

Ainsi : $f \in F \iff P \in \text{Vect}(f_1, f_2)$.

La famille $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$ est génératrice de F ; et elle est clairement libre (car de cardinal 2, et constituée de 2 fonctions non colinéaires). C'est donc une base de F .

Conclusion. La famille $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$ est une base de F . Donc : $\dim F = 2$.

7/ $F = \text{im}\rho$ avec $\rho : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3$

On utilise la propriété bien connue du cours pour déterminer l'image de ρ .

Puisque $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, X^3)$, on a : $\text{im}(\rho) = \text{Vect}(\rho(1), \rho(X), \rho(X^2), \rho(X^3))$.

Or :

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \rho(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \rho(X^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \rho(X^3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que : $\text{im}\rho = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}\right)$.

La famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est donc génératrice de F .

Montrons que \mathcal{B} est libre. Supposons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Alors :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

La résolution aisée de ce système donne : $a = b = c = 0$.

En résumé, on a établi l'implication :

$$[av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbb{R}^3}] \implies [a = b = c = 0]$$

Ce qui signifie que la famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Puisqu'elle est aussi génératrice de F , c'est une base de F .

Conclusion. La famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de F . Donc : $\dim F = 3$. Puisque de plus F est un sev de \mathbb{R}^3 , on en déduit que : $F = \mathbb{R}^3$ (l'application ρ est donc surjective).

EXERCICE 7. — (Dans $M_n(\mathbb{K})$). Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants, et en déduire la dimension :

1/ $F_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}), {}^tA = A\}$.

La famille $\{E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$ est libre et génératrice de F_1 .

Conclusion. La famille $\{E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$ est une base de F_1 . Donc $\dim(F_1) = 3$ (F_1 est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$).

2/ $F_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}), {}^tA = -A\}$.

La famille $\{E_{12} - E_{21}\}$ est libre et génératrice de F_2 .

Conclusion. La famille $\{E_{12} - E_{21}\}$ est une base de F_2 . Donc $\dim(F_2) = 1$ (F_2 est une droite vectorielle de $M_2(\mathbb{R})$).

3/ $F_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}), {}^tA = A\}$.

La famille $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}\}$ est libre et génératrice de F_3 .

Conclusion. La famille $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}\}$ est une base de F_3 . Donc $\dim(F_3) = 6$ (F_3 est un sev de dimension 6 dans un espace vectoriel de dimension 9).

4/ $F_4 = \{A \in M_3(\mathbb{R}), {}^tA = -A\}$.

La famille $\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}$ est libre et génératrice de F_4 .

Conclusion. La famille $\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}$ est une base de F_4 . Donc $\dim(F_4) = 3$ (F_4 est un sev de dimension 3 dans un espace vectoriel de dimension 9).

5/ $F_5 = \{A \in M_n(\mathbb{R}), A \text{ diagonale}\}$.

La famille $\{E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}\}$ est libre et génératrice de F_5 .

Conclusion. La famille $\{E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}\}$ est une base de F_5 . Donc $\dim(F_5) = n$ (F_5 est un sev de dimension n dans un espace vectoriel de dimension n^2).

EXERCICE 8. — On considère la famille $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ de $M_2(\mathbb{K})$, où l'on a posé :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que \mathcal{B} est une base de $M_2(\mathbb{K})$.

Montrons que la famille \mathcal{B}' est libre.

Soient a, b, c et d quatre réels tels que $aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0_E$, alors :

$$\begin{pmatrix} a-b & b-a-c \\ c-b-d & d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b = a \\ b = a+c \\ c = b+d \\ c = d \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que la famille \mathcal{B}' est libre; et puisque son cardinal (4) est égal à la dimension de E , on peut conclure : \mathcal{B}' est une base de E .

EXERCICE 9. — Dans cet exercice, on note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Par ailleurs, on définit sur \mathbb{R} trois fonctions g_1, g_2 et g_3 en posant :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2x}; \quad g_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x} \sin(x\sqrt{3})$$

Enfin on note F le sev de E engendré par les fonctions g_i définies ci-dessus, càd :

$$F = \text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$$

Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{g_1, g_2, g_3\}$ est une base de F .

Supposons qu'il existe 3 réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que : $\sum_{i=1}^3 \alpha_i g_i = 0$.

Il est équivalent d'écrire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \alpha_3 g_3(x) = 0$$

soit encore plus explicitement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) + \alpha_3 e^{-x} \sin(x\sqrt{3}) = 0 \quad (\spadesuit)$$

Il est clair que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin(x\sqrt{3}) = 0$.*

On en déduit, avec (\spadesuit) que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_1 e^{2x} = 0$. Ceci implique que : $\alpha_1 = 0$.

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_2 e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) + \alpha_3 e^{-x} \sin(x\sqrt{3}) = 0$$

Par évaluation en 0, on en déduit que : $\alpha_2 = 0$.

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_3 e^{-x} \sin(x\sqrt{3}) = 0$$

D'où l'on déduit que $\alpha_3 = 0$ puisque la fonction $x \mapsto e^{-x} \sin(x\sqrt{3})$ n'est pas identiquement nulle.

En résumé, on a établi que :

$$\left[\sum_{i=1}^3 \alpha_i g_i = 0 \right] \implies [\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0]$$

Ce qui signifie que la famille $\{g_1, g_2, g_3\}$ est libre.

Puisqu'il est trivial que c'est également une famille génératrice de $\text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$, on peut conclure.

Conclusion. La famille $\{g_1, g_2, g_3\}$ est une base de $F = \text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$. Donc $\dim F = 3$.

EXERCICE 10. — (Une base classique de $\mathbb{K}_n[X]$). Soient n un entier naturel non nul, et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire quelconque.

On considère la famille

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, X - \alpha, (X - \alpha)^2, \dots, (X - \alpha)^n \right\}$$

On se propose de prouver de deux manières différentes que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

*. Bornée \times limite nulle.

1/ Justifier que \mathcal{B} est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

La famille \mathcal{B} est une famille échelonnée de polynômes non nuls : à ce titre, c'est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

De plus : $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$.

Conclusion : \mathcal{B} est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$, et $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$. Donc \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2/ Justifier que \mathcal{B} est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{K}_n[X]$ appliquée en α :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \\ P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2} (X - \alpha)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (X - \alpha)^n$$

D'où : $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(\mathcal{B})$. La famille \mathcal{B} est donc génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

De plus : $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$.

Conclusion : \mathcal{B} est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, et $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$. Donc \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

EXERCICE 11. — (Une autre base classique de $\mathbb{K}_n[X]$ — Polynômes interpolateurs de Lagrange). Soit n un entier naturel non nul.

On considère $(n + 1)$ scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ deux à deux distincts.

On note L_0, \dots, L_n les $(n + 1)$ polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

1/ Question de cours : rappeler l'expression du polynôme L_k pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

A savoir retrouver !!!

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(X - \alpha_i)}{(\alpha_k - \alpha_i)}$$

2/ Etablir que la famille $\mathcal{B} = \{L_0, \dots, L_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Méthode 1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a :

$$P = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L_k$$

D'où : $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(\mathcal{B})$. La famille \mathcal{B} est donc génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

De plus : $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$.

Conclusion : \mathcal{B} est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, et $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$. Donc \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

► **Méthode 2.** Supposons qu'il existe $(n + 1)$ scalaires β_0, \dots, β_n tels que :

$$\sum_{k=0}^n \beta_k L_k = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$$

Alors :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \sum_{k=0}^n \beta_k \underbrace{L_k(\alpha_i)}_{=\delta_{ik}} = \beta_i = 0$$

On a ainsi établi que :

$$\left[\sum_{k=0}^n \beta_k L_k = 0_{\mathbb{K}_n[X]} \right] \implies [\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \beta_i = 0]$$

Ce qui signifie que \mathcal{B} une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

De plus : $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$.

Conclusion : \mathcal{B} est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$, et $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$. Donc \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

EXERCICE 12. — Dans cette partie, E désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels.

On pose $F = \text{Vect}(I_2)$, et on note G le sev des matrices de E de trace nulle.

1/ Déterminer la dimension de F et la dimension de G .

Il est immédiat que $\dim F = 1$ et on montre aisément que $\dim G = 3$.

2/ Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

On vérifie sans difficulté que $F \cap G = \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$. Par suite :

$$\begin{cases} \dim F + \dim G = \dim M_2(\mathbb{R}) \\ F \cap G = \{0_{M_2(\mathbb{R})}\} \end{cases}$$

On en déduit[†] que :

$$M_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$$

EXERCICE 13. — Dans $E = \mathbb{K}_2[X]$ on considère les sev

$$F = \text{Vect}(X^2 + X + 1, 5X + 2) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(X^2 - X).$$

On pourra noter $P_1 = X^2 + X + 1$; $P_2 = 5X + 2$; $P_3 = X^2 - X$.

1/ Etablir que : $F \cap G = \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\}$.

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Supposons que $P \in F \cap G$. Alors il existe trois réels a, b et c tels que :

$$P = a(X^2 + X + 1) + b(5X + 2) \quad (\text{car } P \in F) \quad \text{et} \quad P = c(X^2 - X) \quad (\text{car } P \in G)$$

Ainsi :

$$a(X^2 + X + 1) + b(5X + 2) = c(X^2 - X)$$

Par identification on obtient :

[†]. Avec la nouvelle caractérisation des sev supplémentaires obtenue comme conséquence du T4D.

$$\begin{cases} a = c \\ a + 5b = -c \\ a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ 2a + 5b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ 2a + 5b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

D'où $P = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$. **Conclusion.** $F \cap G = \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\}$

2/ En déduire que : $E = F \oplus G$.

Puisque F est engendré par deux polynômes non colinéaires, on a : $\dim F = 2$.

Puisque G est engendré par un polynôme non nul, on a : $\dim G = 1$.

Par suite :

$$\begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E & (2+1=3 \dots) \\ F \cap G = \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\} & (\text{d'après la question précédente}) \end{cases}$$

On en déduit[‡] que :

$$\mathbb{K}_2[X] = F \oplus G$$

3/ Justifier que $\mathcal{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

D'après la question précédente, on a en particulier : $\mathbb{K}_2[X] = \text{Vect}(P_1, P_2) + \text{Vect}(P_3)$.

D'où : $\mathbb{K}_2[X] = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.

Il s'ensuit que la famille $\mathcal{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$.

De plus, le cardinal de \mathcal{B}' est égal à la dimension de $\mathbb{K}_2[X]$. On peut donc conclure que \mathcal{B}' **est une base de $\mathbb{K}_2[X]$** .

EXERCICE 14. — Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère la partie F constituée des polynômes P tels que $P(1) = P(-1)$.

1/ Montrer que F est un sev de E , en déterminer une base, et en déduire la dimension de F .

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X] : \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

Alors : $P \in F \iff P(1) = P(-1) \iff a + b + c + d = -a + b - c + d \iff c = -a$.

Par suite :

$$P \in F \iff \exists (a, b, d) \in \mathbb{R}^3, P = a(X^3 - X) + bX^2 + d \iff P \in \text{Vect}(X^3 - X, X^2, 1)$$

Ainsi :

$$F = \text{Vect}(X^3 - X, X^2, 1)$$

La famille $\{X^3 - X, X^2, 1\}$ est génératrice de F (archi-trivial), et puisque c'est une famille échelonnée de polynômes, elle est libre. C'est donc une base de F .

Conclusion. La famille $\{X^3 - X, X^2, 1\}$ est une base de F . Donc : $\dim F = 3$.

[‡]. Encore une fois avec la nouvelle caractérisation des sev supplémentaires obtenue comme conséquence du T4D.

2/ Soit $G = \text{Vect}(X)$. Montrer que : $E = F \oplus G$.

D'après la question précédente : $\dim F = 3$.

D'après le cours : $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$.

En outre : $\dim G = 1$, puisque G est engendré par un polynôme non nul.

Par ailleurs, on vérifie sans peine que : $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$.

Ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}_3[X] \\ F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\} \end{array} \right\} \implies \mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$$

Conclusion. F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

DIMENSION ET APPLICATIONS LINÉAIRES

EXERCICE 15. — On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie en posant :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + y + t \\ x + z - t \end{pmatrix} \quad \text{On admet que } f \text{ est linéaire.}$$

1/ Déterminer le noyau de f . En préciser une base et la dimension.

$$\text{Soit } \vec{v} = (x, y, z, t) \in \ker f. \text{ On a : } \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y + t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y = -t \\ x + z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = -t \\ x + z = t \end{cases} \\ \iff \begin{cases} y = -x - t \\ z = t - x \end{cases}$$

En résumé : $\vec{v} \in \ker f \iff \exists (x, t) \in \mathbb{R}^2, \vec{v} = (x, -x - t, t - x, t)$.

$$\text{Par suite : } \ker f = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} \right).$$

La famille (\vec{v}_1, \vec{v}_2) est génératrice de $\ker f$ (c'est ce que l'on vient de prouver) et libre (\vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont clairement non colinéaires) ; c'est donc une base de $\ker f$, et l'on peut conclure que : $\dim \ker f = 2$.

2/ Déterminer l'image de f . En préciser une base et la dimension.

En vertu de la "propriété bien connue", on a : $\text{im } f = \text{Vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3), f(\vec{e}_4))$, où les vecteurs \vec{e}_i constituent la base canonique de \mathbb{R}^4 .

On a donc : $\text{im } f = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_4} \right)$ et l'embaras du choix pour réduire cette famille génératrice.

En observant (par exemple) que : $\vec{w}_4 = \vec{w}_2 - \vec{w}_3$, on obtient : $\text{im } f = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_3} \right)$

Puis en observant que : $\vec{w}_1 = \vec{w}_2 + \vec{w}_3$, on peut affirmer que : $\text{im } f = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_3} \right)$.

La famille (\vec{w}_2, \vec{w}_3) est génératrice de $\text{im } f$ (c'est ce que l'on vient de prouver) et libre (\vec{w}_2 et \vec{w}_3 sont clairement non colinéaires) ; c'est donc une base de $\text{im } f$, et l'on peut conclure que : $\boxed{\dim \text{im } f = 2}$.

EXERCICE 16. — On considère l'application $\varphi : \mathbb{K}_3[X] \rightarrow \mathbb{K}_3[X]$ définie en posant :

$$\forall P \in \mathbb{K}_3[X], \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1/ Montrer que φ est linéaire.

Trivial.

2/ Déterminer $\ker \varphi$ et $\text{im } \varphi$.

Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. Il existe quatre réels a, b, c et d tels que : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

On a alors :

$$P \in \ker \varphi \iff \varphi(P) = 0 \iff P(X+1) = P(X) \iff a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$\iff aX^3 + 3aX^2 + 3aX + a + bX^2 + 2bX + b + cX + c + d = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$\iff aX^3 + (3a+b)X^2 + (3a+2b+c)X + a+b+c+d = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$\iff \begin{cases} a = a \\ 3a + b = b \\ 3a + 2b + c = c \\ a + b + c + d = d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Par suite :

$$P \in \ker \varphi \iff \exists d \in \mathbb{K}, P = d$$

Conclusion. $\ker \varphi = \text{Vect}(1)$.

Par ailleurs :

$$\mathbb{K}_3[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, X^3) \text{ donc } \text{im} \varphi = \text{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$$

D'où : $\text{im} \varphi = \text{Vect}(0, 1, 2X + 1, 3X^2 + 3X + 1)$. **Conclusion.** $\text{im} \varphi = \text{Vect}(1, 2X + 1, 3X^2 + 3X + 1)$.

3/ Préciser une base pour chacun des sev $\ker \varphi$ et $\text{im} \varphi$, en déduire leur dimension.

D'après la question précédente : $\ker \varphi = \text{Vect}(1)$. Donc $\{1\}$ est une base de $\ker \varphi$.[§]

Conclusion. $\{1\}$ est une base de $\ker \varphi$. Donc $\dim(\ker \varphi) = 1$.

D'après la question précédente : $\text{im} \varphi = \text{Vect}(1, 2X + 1, 3X^2 + 3X + 1)$. Donc $\{1, 2X + 1, 3X^2 + 3X + 1\}$ est une famille génératrice de $\text{im} \varphi$.

Montrons qu'elle est libre.

Supposons qu'il existe 3 réels x, y et z tels que :

$$x + y(2X + 1) + z(3X^2 + 3X + 1) = 0$$

Alors par identification on obtient : $z = y = x = 0$.[¶]

On en déduit que la famille $\{1, 2X + 1, 3X^2 + 3X + 1\}$ est libre.

Conclusion. La famille $\{1, 2X + 1, 3X^2 + 3X + 1\}$ est libre et génératrice de $\text{im} \varphi$. C'est donc une base de $\text{im} \varphi$. Donc $\dim(\text{im} \varphi) = 3$.

EXERCICE 17. — (**Transport de bases**). Soient E et F deux \mathbb{K} -ev, $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme de E dans F , et $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ une base de E .

On note $\varphi(\mathcal{B}) = \{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ l'image de \mathcal{B} par φ . Montrer que $\varphi(\mathcal{B})$ est une base de F .

On prouve ainsi l'énoncé :

“L'image d'une base par un isomorphisme est une base”

Cf TD de lundi :-)

EXERCICE 18. — (**Conséquence du “transport de bases”**). Soient E et F deux \mathbb{K} -ev.

On suppose que $\dim(E) = n$, et que E et F sont isomorphes (càd qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ de E dans F). Etablir que $\dim(F) = n$

On prouve ainsi l'énoncé :

“Deux ev de dimension finie isomorphes ont la même dimension.”

Soit $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ une base de E , et $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme de E dans F .

On montre facilement que la famille $\varphi(\mathcal{B}) = \{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ est génératrice de F (en utilisant le fait que \mathcal{B} est une base de E , et la surjectivité de φ), et libre (en utilisant l'injectivité de φ).^{||}

Donc la famille $\varphi(\mathcal{B})$ est une base de F . Par conséquent : $\dim F = \text{card}(\varphi(\mathcal{B}))$.

Conclusion. $\dim(F) = n$.

§. Un singleton $\{\vec{v}\}$ est une famille libre SSI \vec{v} est non nul.

¶. Comparer les termes en X^2 , puis en X puis constants.

||. Au passage, c'est une magnifique question de cours!

COORDONNÉES ET MATRICES DE PASSAGE

EXERCICE 19. — (Coordonnées dans $\mathbb{R}_3[X]$).

Quelles sont les coordonnées de $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$ dans :

1/ la base canonique $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$?

Avec les notations du cours, il est immédiat que : $X_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2/ la base $\mathcal{B}_2 = (1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$?

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{R}_3[X]$ appliquée en 1, on a :

$$X_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \\ P''(1)/2 \\ P'''(1)/6 \end{pmatrix} \quad \text{càd} \quad X_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3/ la base $\mathcal{B}_3 = (L_0, L_1, L_2, L_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, où les L_i désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux réels 0, 1, 2 et 3 ?

D'après les propriétés relatives aux polynômes interpolateurs de Lagrange, on a :

$$X_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \end{pmatrix} \quad \text{càd} \quad X_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 15 \\ 43 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 20. — (Matrice de passage). On considère la famille $B' = (P_1, P_2, P_3)$ avec :

$$P_1 = X^2 - 1; \quad P_2 = (X - 1)^2; \quad P_3 = (X + 1)^2$$

1/ Etablir que la famille B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient a, b et c trois réels tels que : $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

Alors :

$$a(X^2 - 1) + b(X - 1)^2 + c(X + 1)^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

Par évaluation en 1, on en déduit que : $c = 0$.

Donc :

$$a(X^2 - 1) + b(X - 1)^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

Par évaluation en -1 , on en déduit que : $b = 0$.

Donc :

$$a(X^2 - 1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

D'où : $a = 0$.

On a ainsi établi que :

$$[aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}] \implies [a = b = c = 0]$$

La famille B' est donc libre. Puisqu'en outre son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut conclure : B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B' .

$$\text{La matrice de passage de la base } B \text{ à la base } B' \text{ est : } P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3/ Après avoir brièvement justifié que P est inversible, calculer P^{-1} . **

Soient (x, y, z) et (b_1, b_2, b_3) dans \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned} \text{On a : } P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} -x + y + z = b_1 \\ -2y + 2z = b_2 \\ x + y + z = b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + z - b_1 \\ -2y + 2z = b_2 \\ 2y + 2z = b_1 + b_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y + z - b_1 \\ 4y = b_1 - b_2 + b_3 \\ 4z = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = (b_3 - b_1)/2 \\ y = (b_1 - b_2 + b_3)/4 \\ z = (b_1 + b_2 + b_3)/4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion. } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 21. — Dans cet exercice, on note $E = M_2(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients réels.

On note $\mathbf{B} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ la base canonique de E ; et I_2 la matrice identité de E .

Enfin, on note :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ On considère le sev :

$$F = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$$

Montrer que la famille $\mathbf{B}_1 = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de F .

Soient a, b et c trois réels tels que : $aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$. Alors : $\begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & 2a \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

D'où : $a = b = c = 0$.

La famille $\{M_1, M_2, M_3\}$ est donc libre, et génératrice de F : par suite, c'est une base de F .

Conclusion. $\dim F = 3$. Donc F est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$ (puisque $M_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4).

** . On pourra vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{4}R$, où $R \in M_3(\mathbb{R})$ est une matrice dont les coefficients appartiennent à $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

2/ On pose : $G = \text{Vect}(I_2)$. Etablir que F et G sont supplémentaires dans E .

Si I_2 appartenait à F , il existerait trois réels a, b et c tels que : $I_2 = aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0$. Cette égalité impliquerait en particulier : $a = 2a = 1$, ce qui est absurde. Donc : $I_2 \notin F$.

Conclusion. Puisque F est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$, et que $I_2 \notin F$, le cours assure que :

$$E = F \oplus \text{Vect}(I_2).$$

3/ On introduit à présent la famille :

$$\mathbf{B}' = \{M_1, M_2, M_3, I_2\}$$

Etablir que \mathbf{B}' est une base de E .

D'après la question précédente et l'énoncé, on a :

$$E = F + \text{Vect}(I_2) = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3) + \text{Vect}(I_2) = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3, I_2)$$

Il s'ensuit que \mathbf{B}' est génératrice de E . Puisqu'en outre son cardinal est égal à la dimension de $M_2(\mathbb{R})$, on peut conclure.

Conclusion. \mathbf{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4/ Ecrire la matrice de passage P de la base \mathbf{B} à la base \mathbf{B}' .

$$\text{D'après le cours : } P_{\mathbf{B}\mathbf{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5/ Donner les coordonnées de la matrice \mathbf{E}_{11} dans la base \mathbf{B} , ainsi que dans la base \mathbf{B}' .

Les coordonnées de \mathbf{E}_{11} dans la base \mathbf{B} sont clairement : $(1, 0, 0, 0)$.

Pour avoir les coordonnées de cette matrice dans la base \mathbf{B}' , on peut utiliser la matrice de passage (inverse à calculer) et la formule du cours, ou chercher à exprimer \mathbf{E}_{11} en fonction des éléments de \mathbf{B}' (ce n'est pas trop difficile).

En observant que $\mathbf{E}_{11} = 2I_2 - M_1$, on peut conclure que les coordonnées de \mathbf{E}_{11} dans la base \mathbf{B}' sont : $(-1, 0, 0, 2)$.

EXTRAITS DE DS, DE CB, DE CONCOURS

EXERCICE 22. — Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'endomorphisme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P &\longmapsto P - P' \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Un polynôme P est dans le noyau de f si et seulement si $P = P'$. Par comparaison des degrés, cette égalité est vérifiée si et seulement si le polynôme P est nul. On en déduit que l'endomorphisme f est **injectif**.

Par ailleurs :

$$\text{im} f = \text{Vect}(f(1), f(X), \dots, f(X^n)) \iff \text{im} f = \text{Vect}(1, X - 1, \dots, X^k - kX^{k-1}, \dots, X^n - nX^{n-1})$$

La famille $\{1, X - 1, \dots, X^k - kX^{k-1}, \dots, X^n - nX^{n-1}\}$ est une famille échelonnée de polynômes non nuls de $\mathbb{K}_n[X]$; à ce titre elle est libre. Comme en outre son cardinal $(n + 1)$ est égal à la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On en déduit que :

$$\text{im} f = \text{Vect}(1, X - 1, \dots, X^k - kX^{k-1}, \dots, X^n - nX^{n-1}) = \mathbb{K}_n[X]$$

Il s'ensuit que l'endomorphisme f est **surjectif**.

Donc l'endomorphisme f est **bijectif**.

Conclusion. L'endomorphisme f est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

EXERCICE 23. — Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto P + XP'' \end{aligned}$$

est bijective (on pourra admettre que f est linéaire).

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a : $P \in \ker f \iff f(P) = 0 \iff P = -XP''$.

On vérifie alors sans peine (essentiellement par comparaison des degrés) $P \in \ker f \iff P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Par suite : $\ker f = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. **Donc l'endomorphisme f est injectif.**

Par ailleurs, d'après le cours :

$$\text{im} f = \text{Vect}(\mathcal{F}) \quad \text{en ayant noté} \quad \mathcal{F} = \{f(1), f(X), \dots, f(X^n)\}$$

Or pour tout entier k compris entre 0 et n , on a clairement :

$$\deg(f(X^k)) = k$$

En d'autres termes, la famille \mathcal{F} est une famille échelonnée de polynômes. Elle est donc libre, d'après l'exo précédent.

Comme de plus :

$$\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$$

on en déduit que \mathcal{F} est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par suite :

$$\text{im} f = \text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}_n[X] \quad \text{Donc l'endomorphisme } f \text{ est surjectif.}$$

Conclusion. L'endomorphisme f est bijectif. C'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ($f \in \text{GL}(\mathbb{R}_n[X])$).

EXERCICE 24. — Montrer que la famille $\mathbf{B}_1 = \{(X + 1)^2, X^2 - 1, (X - 1)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient a, b et c trois réels tels que : $a(X + 1)^2 + b(X^2 - 1) + c(X - 1)^2 = 0$

Par évaluation en 1, on obtient : $4a = 0$. D'où $a = 0$. D'où : $b(X^2 - 1) + c(X - 1)^2 = 0$.

Par évaluation en -1 , on obtient : $4c = 0$. D'où $c = 0$. D'où : $b(X^2 - 1) = 0$. D'où : $b = 0$.

Finalement : $[a(X + 1)^2 + b(X^2 - 1) + c(X - 1)^2 = 0] \implies [a = b = c = 0]$

Il s'ensuit que la famille \mathbf{B}_1 est libre. En outre : $\text{card}\mathbf{B}_1 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$. Donc \mathbf{B}_1 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Conclusion. La famille $\mathbf{B}_1 = \{(X + 1)^2, X^2 - 1, (X - 1)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 25. — Soit n un entier naturel. Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose : $Q_k = (X - 1)^k (X + 1)^{n-k}$

1/ Etablir que :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{1}{2^{n-j}} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k} Q_{k+j} = (X - 1)^j$$

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Selon l'énoncé :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k} Q_{k+j} &= \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k} (X - 1)^{k+j} (X + 1)^{n-k-j} \\ \iff \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k} Q_{k+j} &= (X - 1)^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-(X - 1))^k (X + 1)^{(n-j)-k} \\ \iff \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k} Q_{k+j} &= (X - 1)^j [-(X - 1) + (X + 1)]^{n-j} \quad (\text{binôme de Newton}) \\ \iff \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k} Q_{k+j} &= 2^{n-j} (X - 1)^j \end{aligned}$$

Conclusion. $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{1}{2^{n-j}} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k} Q_{k+j} = (X - 1)^j$

2/ Justifier brièvement que la famille $\mathbf{B}_0 = \{(X - 1)^j, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

La famille $\mathbf{B}_0 = \{(X - 1)^j, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une famille échelonnée de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$; elle est donc libre.

Puisqu'en outre le cardinal de \mathbf{B}_0 (qui vaut $n + 1$) est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, on peut conclure.

Conclusion. La famille $\mathbf{B}_0 = \{(X - 1)^j, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3/ Dédire de ce qui précède que la famille $\mathbf{B}_1 = \{Q_k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Puisque tous les polynômes Q_k sont à coefficients réels et de degré n , on peut déjà affirmer que : $\text{Vect}(\mathbf{B}_1) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

Par ailleurs, il résulte de la question 2-a que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, (X - 1)^j \in \text{Vect}(\mathbf{B}_1)$.

Il s'ensuit que : $\text{Vect}(\mathbf{B}_0) \subset \text{Vect}(\mathbf{B}_1)$.

On en déduit que : $\text{Vect}(\mathbf{B}_0) \subset \text{Vect}(\mathbf{B}_1) \subset \mathbb{R}_n[X] \quad (\heartsuit)$

Or, la famille \mathbf{B}_0 étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (question précédente), on a $\text{Vect}(\mathbf{B}_0) = \mathbb{R}_n[X]$.

La chaîne d'inclusions (\heartsuit) devient donc : $\mathbb{R}_n[X] \subset \text{Vect}(\mathbf{B}_1) \subset \mathbb{R}_n[X]$

D'où : $\text{Vect}(\mathbf{B}_1) = \mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, la famille \mathbf{B}_1 est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. Puisqu'en outre le cardinal de \mathbf{B}_1 (qui vaut $n + 1$) est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, on peut conclure.

Conclusion. La famille $\mathbf{B}_1 = \{Q_k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 26. — (**Racines carrées de l'identité de $\mathbb{K}_2[X]$**) Dans cet exercice, \mathbf{E}_1 désigne le \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On note $\mathbf{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de \mathbf{E}_1 .

On note : $P_1 = X(X - 1)$; $P_2 = X(X - 2)$; et $P_3 = (X - 1)(X - 2)$.

Enfin, on note : $F = \text{Vect}(P_1, P_2)$ et $G = \text{Vect}(P_3)$.

1/ Etablir que $\mathbf{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de \mathbf{E}_1 .

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = \tilde{0}$.

Alors : $\alpha_1 X(X - 1) + \alpha_2 X(X - 2) + \alpha_3 (X - 1)(X - 2) = \tilde{0}$

Par évaluation en 0, on en déduit : $\alpha_3 = 0$. D'où : $\alpha_1 X(X - 1) + \alpha_2 X(X - 2) = \tilde{0}$

Par évaluation en 1, on en déduit : $\alpha_2 = 0$. D'où : $\alpha_1 X(X - 1) = \tilde{0}$. D'où : $\alpha_1 = 0$

Ainsi : $[\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = \tilde{0}] \implies [\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0]$. Ce qui prouve que la famille \mathbf{B}' est libre.

Donc \mathbf{B}' est une famille libre de \mathbf{E}_1 , telle que $\text{Card}(\mathbf{B}') = \dim \mathbf{E}_1$.

CONCLUSION. \mathbf{B}' est une base de \mathbf{E}_1 .

2/ Etablir que : $\mathbf{E}_1 = F \oplus G$.

D'après la question précédente, \mathbf{B}' est génératrice de \mathbf{E}_1 . D'où :

$$\mathbf{E}_1 = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3) = \text{Vect}(P_1, P_2) + \text{Vect}(P_3) = F + G \quad (\spadesuit)$$

En outre, il est clair que $\dim F = 2$ et $\dim G = 1$. Or selon le T4D : $\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim F + G \quad (\clubsuit)$

D'après (\spadesuit) et (\clubsuit) : $\dim F \cap G = 0$. D'où : $F \cap G = \{\vec{0}_{\mathbf{E}_1}\}$.

CONCLUSION. On a prouvé que : $\mathbf{E}_1 = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}_{\mathbf{E}_1}\}$. Donc : $\mathbf{E}_1 = F \oplus G$.

3/ Ecrire la matrice de passage $P_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}$ de la base \mathbf{B} à la base \mathbf{B}' .^{††}

On a : $P_1 = X^2 - X$; $P_2 = X^2 - 2X$; et $P_3 = X^2 - 3X + 2$.

$$\text{D'après le cours : } P_{\mathbf{B}\mathbf{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4/ **Etude d'une symétrie.** On note s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G . On rappelle que s_F est un endomorphisme de \mathbf{E}_1 .

a/ Etablir que : $(s_F - \text{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \text{id}_{\mathbf{E}_1}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_1)}$

On a : $(s_F - \text{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \text{id}_{\mathbf{E}_1}) = s_F^2 - \text{id}_{\mathbf{E}_1}$. Or $s_F^2 = \text{id}_{\mathbf{E}_1}$ (par définition de s_F).

CONCLUSION. $(s_F - \text{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \text{id}_{\mathbf{E}_1}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_1)}$

b/ Justifier brièvement que : $\forall Q \in \mathbf{E}_1, \exists! (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

La famille $\mathbf{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de \mathbf{E}_1 . Tout polynôme Q de \mathbf{E}_1 admet donc un unique triplet de coordonnées dans cette base.

CONCLUSION. $\forall Q \in \mathbf{E}_1, \exists! (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

^{††}. Cette question a un unique intérêt : rapporter un point à tout.e étudiant.e qui sait traiter cette question de cours. La matrice $P_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}$ ne sera pas réutilisée dans la suite du problème.

c/ Calculer $s_F(P_1)$, $s_F(P_2)$ et $s_F(P_3)$.

Puisque P_1 et P_2 appartiennent à F , on a $s_F(P_1) = P_1$ et $s_F(P_2) = P_2$.

Puisque P_3 appartient à G , on a $s_F(P_3) = -P_3$.

CONCLUSION. $s_F(P_1) = P_1$; $s_F(P_2) = P_2$ et $s_F(P_3) = -P_3$

d/ Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$. A l'aide de la question précédente, calculer : $s_F(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3)$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$. Par linéarité de s_F et d'après la question précédente, on a :

$$s_F(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3) = \alpha_1 s_F(P_1) + \alpha_2 s_F(P_2) + \alpha_3 s_F(P_3) = P_1 + P_2 - P_3$$

CONCLUSION. $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$, $s_F(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3) = P_1 + P_2 - P_3$

e/ Montrer que $\ker(s_F - \text{id}_{\mathbf{E}_1})$ est un sev de \mathbf{E}_1 , de dimension 2; et que $\ker(s_F + \text{id}_{\mathbf{E}_1})$ est un sev de \mathbf{E}_1 , de dimension 1.

Soit $Q \in \mathbf{E}_1$. D'après la question 4-b : $\exists! (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$, $Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

On a : $Q \in \ker(s_F - \text{id}_{\mathbf{E}_1}) \iff s_F(Q) = Q \iff \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 - \alpha_3 P_3 = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 \iff \alpha_3 = 0$

(la dernière équivalence provenant de l'unicité des coordonnées d'un polynôme dans la base \mathbf{B}').

Ainsi : $Q \in \ker(s_F - \text{id}_{\mathbf{E}_1}) \iff \exists! (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, $Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 \iff Q \in F$

D'où : $\ker(s_F - \text{id}_{\mathbf{E}_1}) = F$ et $\dim \ker(s_F - \text{id}_{\mathbf{E}_1}) = 2$ (F est engendré par 2 vecteurs, qui constituent une famille libre car extraite d'une base).

Par ailleurs on a :

$$Q \in \ker(s_F + \text{id}_{\mathbf{E}_1}) \iff s_F(Q) = -Q \iff \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 - \alpha_3 P_3 = -\alpha_1 P_1 - \alpha_2 P_2 - \alpha_3 P_3 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

(la dernière équivalence provenant de l'unicité des coordonnées d'un polynôme dans la base \mathbf{B}').

Ainsi : $Q \in \ker(s_F + \text{id}_{\mathbf{E}_1}) \iff \exists! \alpha_3 \in \mathbb{K}$, $Q = \alpha_3 P_3 \iff Q \in G$

D'où : $\ker(s_F + \text{id}_{\mathbf{E}_1}) = G$ et $\dim \ker(s_F + \text{id}_{\mathbf{E}_1}) = 1$ (G est engendré par 1 vecteur non nul).

CONCLUSION. $\ker(s_F - \text{id}_{\mathbf{E}_1}) = F$ et $\dim \ker(s_F - \text{id}_{\mathbf{E}_1}) = 2$; $\ker(s_F + \text{id}_{\mathbf{E}_1}) = G$
et $\dim \ker(s_F + \text{id}_{\mathbf{E}_1}) = 1$.

Remarque : à l'issue de cette question, on peut observer que : $\mathbf{E}_1 = \ker(s_F + \text{id}_{\mathbf{E}_1}) \oplus \ker(s_F - \text{id}_{\mathbf{E}_1})$

EXERCICE 27. — (**Racines cubiques de l'identité de $\mathbb{C}_2[X]$**) Dans cet exercice, on note $\mathbf{E}_2 = \mathbb{C}_2[X]$, et on considère l'application

$$f : \mathbf{E}_2 \longrightarrow \mathbf{E}_2 \quad \text{avec } j = e^{2i\pi/3}$$

$$aX^2 + bX + c \longmapsto aj^2X^2 + bjX + c$$

Il revient au même de dire que l'application f envoie le polynôme $P(X)$ sur le polynôme $P(jX)$.

5/ Etablir que f est un endomorphisme de \mathbf{E}_2 .

Soient P et Q dans \mathbf{E}_2 , et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(jX) = \lambda P(jX) + \mu Q(jX) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

Ce qui prouve que f est linéaire ; puisque de plus f est définie sur \mathbf{E}_2 et à valeurs dans \mathbf{E}_2 , on peut conclure.

CONCLUSION. f est un endomorphisme de \mathbf{E}_2 .

6/ Etablir que : $f^3 = \text{id}_{\mathbf{E}_2}$

Pour tout polynôme $P \in \mathbf{E}_2$ on a :

$$f^3(P) = f^2(f(P)) = f^2(P(jX)) = f(f(P(jX))) = f(P(j^2X)) = P(j^3X) = P(X)$$

CONCLUSION. $f^3 = \text{id}_{\mathbf{E}_2}$

7/ Montrer que $\ker(f - \text{id}_{\mathbf{E}_2})$ est le sev de \mathbf{E}_2 constitué des polynômes constants.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{E}_2$. On a :

$$P \in \ker(f - \text{id}_{\mathbf{E}_2}) \iff f(P) = P \iff aj^2X^2 + bjX + c = aX^2 + bX + c \iff a = b = 0$$

Ainsi : $P \in \ker(f - \text{id}_{\mathbf{E}_2}) \iff \exists c \in \mathbb{C}, P = c \iff P \in \text{Vect}(1)$.

CONCLUSION. $\ker(f - \text{id}_{\mathbf{E}_2}) = \text{Vect}(1)$

8/ Pour tout $P \in \mathbf{E}_2$, calculer $f^2(P) + f(P) + P$. En déduire que : $\ker(f^2 + f + \text{id}_{\mathbf{E}_2}) = \text{Vect}(X, X^2)$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{E}_2$. On a :

$$\begin{aligned} f^2(P) + f(P) + P &= (ajX^2 + bj^2X + c) + (aj^2X^2 + bjX + c) + (aX^2 + bX + c) \\ &= a \left(\underbrace{1 + j + j^2}_{=0} \right) X^2 + b \left(\underbrace{1 + j + j^2}_{=0} \right) X + 3c \end{aligned}$$

Ainsi : $f^2(P) + f(P) + P = 3c$.

On en déduit que :

$$P \in \ker(f^2 + f + \text{id}_{\mathbf{E}_2}) \iff \exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, P = aX^2 + bX$$

CONCLUSION. $\ker(f^2 + f + \text{id}_{\mathbf{E}_2}) = \text{Vect}(X, X^2)$

Remarque : à l'issue de cette question, on peut observer que : $\mathbf{E}_2 = \ker(f^2 + f + \text{id}_{\mathbf{E}_2}) \oplus \ker(f - \text{id}_{\mathbf{E}_2})$