

EXERCICES 23 — PROBABILITÉS

PROBABILITÉS “BASQUES”, CONDITIONNELLES, FORMULE(S) DES PROBAS TOTALES

EXERCICE 1. — Une urne contient 3 billes vertes et 5 billes rouges toutes indiscernables au toucher. Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l’urne ; il note sa couleur et ne remet pas la bille dans l’urne. Puis il tire une seconde bille de l’urne et il note sa couleur. Calculer la probabilité des évènements suivants : E_1 : “Le joueur a tiré deux billes rouges” et E_2 : “Le joueur a tiré exactement une bille verte”.

EXERCICE 2. — Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles. La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu’une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu’une cible n’est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l’évènement : « la n -ième cible est atteinte ».
- a_n (resp. b_n) la probabilité de l’évènement A_n (resp. $\overline{A_n}$).

1/ Donner a_1 et b_1 . Calculer a_2 et b_2 . On pourra utiliser un arbre pondéré.

2/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$. Puis établir que : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

3/ Dédurre de la question précédente l’expression de a_n en fonction de n , puis la limite de la suite (a_n) .

EXERCICE 3. — **Marche aléatoire sur un carré.**

ABCD est un carré de centre O. Un jeton posé sur l’un des cinq points peut se déplacer de façon aléatoire vers l’un des autres voisins suivant le mode suivant : tous les pas issus de l’un des sommets A, B, C et D ont pour probabilité $1/3$; et tous les pas issus de O ont une probabilité de $1/4$. Un chemin est une suite de pas successifs. Au départ le jeton est en A.

1/ Le jeton fait deux pas. Calculer la probabilité qu’il arrive en A, en B, en C, en D, en O ?

2/ Il fait un pas de plus. Quelle est la probabilité qu’il arrive en O ?

3/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note p_n la probabilité pour que le jeton arrive en O après n pas. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$$

4/ Expliciter p_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

EXERCICE 4. — Soit n un entier naturel non nul, et soit α un réel. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \alpha k^2$$

1) Déterminer la valeur de α .

2) Calculer l’espérance de X .

EXERCICE 5. — Deux joueurs lancent 10 fois de suite (et de manière indépendante) une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité que les deux joueurs obtiennent le même nombre de “pile” au cours des n lancers.

EXERCICE 6. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p . Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = n - X$?

EXERCICE 7. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0; 1[$. Pour quelle valeur de k , la probabilité $p_k = P(X = k)$ est-elle maximale ?

EXERCICE 8. — Un archer tire sur n cibles. A chaque tir, il a la probabilité p de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants.

Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet. L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchées lors de cette tentative.

Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.

EXERCICE 9. — Soit p un réel tel que : $0 < p < 1$.

Un joueur répète de manière successive et indépendante une expérience au cours de laquelle il peut connaître un succès (avec la probabilité p) ou un échec (avec la probabilité $q = 1 - p$).

Le jeu s'arrête au premier succès.

On note X la variable aléatoire égale au rang du premier succès.

Au cours de cet exercice, on pourra au besoin noter S_k l'évènement "le joueur a obtenu un succès au cours de la k -ième expérience", et E_k l'évènement \bar{S}_k (pour tout entier naturel non nul k).

- 1) Indiquer quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X , justifier brièvement que $P(X = 2) = qp$. Que vaut $P(X = 3)$?
- 2) Pour tout entier naturel non nul N , calculer $P(X \leq N)$.
- 3) Vérifier que :
$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=1}^N P(X = k) \right] = 1.$$

EXERCICE 10. — Soit X une V.A.R. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$. On pose $Y = 1 - X$.

Déterminer la loi de probabilité de Y , ainsi que son espérance et sa variance.

EXERCICE 11. — Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, p un réel de $[0, 1]$, et X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et que Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$.

1/ A propos de la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

a/ Calculer l'espérance de Y . b/ Etablir que la variance de Y est : $V(Y) = \frac{n(n+2)}{12}$.

2/ On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$.

a/ Calculer la probabilité p_1 que la matrice C soit antisymétrique.

b/ Calculer la probabilité p_2 que la matrice C soit symétrique.

EXERCICE 12. — (EXTRAIT DE E3A PSI 2024). Soit n un entier naturel non nul. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) , et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$: $A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & Y(\omega) \\ Z(\omega) & 2 \end{pmatrix}$.

Questions préliminaires

1. Soient A et B deux évènements (deux parties de l'univers Ω).

Rappeler les formules générales donnant $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(\overline{A})$.

2. Calcul d'une somme

a. Déterminer le coefficient de X^n dans le polynôme $(1 + X)^{2n}$, de deux manières différentes.

b. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Calculs de probabilités

3. Calculer la probabilité de l'évènement $\mathbf{E}_1 = \{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est triangulaire supérieure}\}$, c'est à dire calculer la probabilité $\mathbb{P}(Z = 0)$.

4. a. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et b la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$ est-elle non-inversible ?

b. Calculer la probabilité de l'évènement $\mathbf{E}_2 = \{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ n'est pas inversible}\}$.

On pourra utiliser une formule rappelée dans la question 1.

5. a. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et b la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$ est-elle symétrique ?

b. Calculer la probabilité de l'évènement $\mathbf{E}_3 = \{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est symétrique}\}$, en utilisant la formule des probabilités totales.

On pourra utiliser la question 2.b pour établir que :
$$\mathbb{P}(\mathbf{E}_3) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\mathbf{E}_3)$. On pourra à cette fin utiliser la formule de Stirling :

$$n! \sim_{+\infty} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

EXERCICE 13. — (URNES DE PÓLYA - EXTRAIT DE CCINP PC 2021).

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges, et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

- si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
- si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire ;

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n -ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n -ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n -ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n -ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P_F(E)$ ou $P(E|F)$) par :

$$P_F(E) = P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

PARTIE I — PRÉLIMINAIRES

1. Déterminer la loi de X_1 .
2. Calculer $P(X_2 = 1|X_1 = 1)$ et $P(X_2 = 1|X_1 = 0)$. En déduire la loi de X_2 .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

PARTIE II — LOI DE X_n

Dans cette partie, on considère $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in \llbracket b, n + b \rrbracket$, calculer $P(X_{n+1} = 1|S_n = k)$.
5. A l'aide de la formule des probabilités totales, établir que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathbf{E}(S_n)}{b + r + n}$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.