

**Chapitre 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires**  
 + **Chapitre 22 : Espaces vectoriels de dimension finie**  
 (COURS + EXERCICES)

**Chapitre 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires**

- 1 – Espaces vectoriels
- 2 – Sous-espaces vectoriels
- 3 – Combinaisons linéaires, familles génératrices
- 4 – Applications linéaires
- 5 – Noyau et image d’une application linéaire
- 6 – Isomorphismes et automorphismes
- 7 – Sommes de sev et sev supplémentaires
- 8 – Projecteurs

**Chapitre 22 : Espaces vectoriels de dimension finie**

*Dans ce chapitre,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Dorénavant, on pourra noter  $v$  au lieu de  $v$  un élément de  $E$ .*

**1 – Familles libres et bases d’un espace vectoriel**

**Définition** :  $n$  vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  d’un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  sont **linéairement indépendants** si :

$$\left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_E \right] \implies [\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = 0] \quad (\text{avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n)$$

**Remarque** : la définition fournit une méthode pour prouver que  $n$  vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  d’un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  sont linéairement indépendants. Explicitement, on suppose qu’il existe  $n$  scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E$ , et on établit que cette égalité n’est satisfaite que lorsque tous les  $\lambda_i$  sont nuls.

**Définitions** : famille libre, famille liée.

**Propriété** : soient  $v_1, \dots, v_n$   $n$  vecteurs d’un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ . La famille  $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  est **liée** SSI il existe un entier  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que :  $v_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n)$ .

**Définition** : **base** d’un espace vectoriel, bases canoniques des ev “de référence”.

**2 – Espaces vectoriels de dimension finie**

**Définition** : on appelle  **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie** un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  ayant une famille génératrice finie.

**Exemples** :  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n, \mathbb{K}^n, M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K}_n[X]$  sont de dim finie ;  $\mathbb{K}[X]$  et  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ne le sont pas.

**Théorème** : dans un espace vectoriel (non nul) de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

**Définition** : la dimension d’un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie est le cardinal d’une quelconque de ses bases.

**Notation** :  $\dim_{\mathbb{K}} E$ , ou  $\dim E$  si pas d’ambiguïté sur  $\mathbb{K}$ .

**Théorème (“de la base extraite”)** : de toute famille génératrice on peut extraire une base.

**Corollaire** : tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

**Corollaire** : soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ .

- 1/ Toute famille génératrice de  $E$  possède au moins  $n$  éléments.
- 2/ Toute famille génératrice de  $E$  de cardinal  $n$  est une base.

**Théorème (de la base incomplète)** : toute famille libre de  $E$  est contenue dans une base de  $E$ .

**Corollaire** : soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev non nul de dimension finie  $n$ .

- 1/ Toute famille libre de  $E$  possède au plus  $n$  éléments.
- 2/ Toute famille libre de  $E$  de cardinal  $n$  est une base.

**Corollaire** : soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev non nul de dimension finie  $n$ , et  $F$  un sev de  $E$ .

- Alors :
- 1/  $\dim F \leq n$
  - 2/  $\dim F = n$  SSI  $F = E$

**3 – Dimension d’une somme de sev**

**Propriété** : soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et  $F$  et  $G$  deux sev supplémentaires dans  $E$  (ie  $E = F \oplus G$ ). Alors :  $\dim E = \dim F + \dim G$ .

**Théorème (existence d’un supplémentaire en dimension finie)** : soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et  $F$  un sev de  $E$ . Il existe un sev  $G$  de  $E$  tel que :  $E = F \oplus G$ .

**Théorème (des 4 dimensions ou relation de Graßmann)** : soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ . Alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

**Corollaire** : soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ . Alors  $E = F \oplus G$  SSI  $\dim E = \dim F + \dim G$  et  $F \cap G = \{0_E\}$ .

**Définition** : soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ . On appelle **hyperplan** de  $E$  un sev de  $E$  de dimension  $n - 1$ .

**Propriété** : soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ ,  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $v$  un vecteur de  $E$  tel que  $v \notin H$ . Alors :  $E = H \oplus \text{Vect}(v)$ .

## 4 – Coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de passage

**Théorème** : soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ , et soit  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $E$ . Alors :

$$\forall V \in E, \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, V = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

**Définition** : les scalaires  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  du théorème ci-dessus sont appelés **coordonnées du vecteur  $V$  dans la base  $\mathcal{B}$** .

## Changement de base et matrice de passage

**Définition** : soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  ( $n \neq 0$ ), soient  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  et  $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$  deux bases de  $E$ . La **matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la**

**base  $\mathcal{B}'$**  notée  $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  =  $(\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  tq :  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, w_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} v_i$

**Traduction** :  $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  est la matrice obtenue en mettant en colonnes les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$  (attention à l'ordre!).

**Propriété (effet d'un changement de base sur les coordonnées)** : soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  ( $n \neq 0$ ), soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Pour tout vecteur  $V$  de  $E$ , notons  $X_{\mathcal{B}}$  et  $X_{\mathcal{B}'}$  les  $n$ -uplets de ses coordonnées dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  respectivement. On a :  $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$ .

**Propriété** : soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  ( $n \neq 0$ ), soient  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  trois bases de  $E$ . On a :  $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$ .

**Corollaire** : soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  ( $n \neq 0$ ), soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors  $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , et  $[P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}]^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ .

Pour enfoncer le clou : **toute matrice de passage est inversible.**

## 5 – Classification des ev de dimension finie

**Théorème (classification des ev de dimension finie)** : tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

**Traduction** : à isomorphisme près,  $\mathbb{K}^n$  est le seul  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ .

## QUESTIONS DE COURS

- **Propriété** : soient  $v_1, \dots, v_n$   $n$  vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ . La famille  $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  est **liée SSI** il existe un entier  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que :  $v_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n)$ .
- **Théorème (existence d'un supplémentaire en dimension finie)** : soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et  $F$  un sev de  $E$ . Il existe un sev  $G$  de  $E$  tel que :  $E = F \oplus G$ .
- **Théorème (des 4 dimensions ou relation de Graßmann)** : soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ . Alors :  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

- **Propriété (caractérisation des supplémentaires en dimension finie)** : soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ . Alors :  $E = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$
- **Propriété** : soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ ,  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $v$  un vecteur de  $E$  tel que  $v \notin H$ . Alors :  $E = H \oplus \text{Vect}(v)$ .
- **Théorème (classification des ev de dimension finie)** : tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .