Colle 27 – Questions de cours

Question de cours 1. — Propriété : Si A et B sont deux évènements d'un univers Ω, alors : $\mathbb{P}_A\left(\bar{B}\right) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ <u>et</u> $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)$

Preuve. *On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble fini.*
Soit A un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
Alors pour tout évènement B, on a : $\Omega = B \cup \bar{B}$. D'où : $A \cap \Omega = A \cap \left(B \cup \bar{B}\right)$.
Or $A \cap \Omega = A$ (puisque $A \subset \Omega$) ; et $A \cap \left(B \cup \bar{B}\right) = (A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)$ (distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$).
On en déduit que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left((A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)\right)$.
Or l'union $(A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)$ est disjointe*, donc (par définition de probabilité) :

$$\mathbb{P}\left((A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)\right) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \bar{B}\right)$$

En résumé, on a établi que : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \bar{B}\right)$, d'où en divisant tous les termes de cette égalité par $\mathbb{P}(A)$ (qui est non nulle) : $1 = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A\left(\bar{B}\right)$, soit finalement : $\boxed{\mathbb{P}_A\left(\bar{B}\right) = 1 - \mathbb{P}_A(B)}$.

➤ Pour le second point, on considère B_1 et B_2 deux évènements arbitraires dans Ω. On a alors :

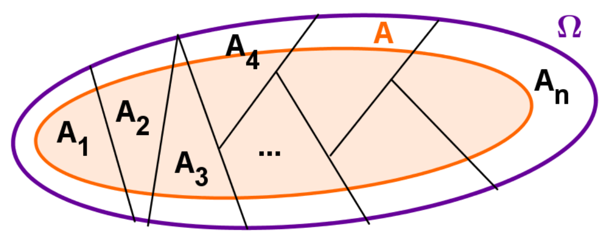
$$\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \frac{\mathbb{P}((B_1 \cup B_2) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap A) + \mathbb{P}(B_2 \cap A) - \mathbb{P}((B_1 \cap B_2) \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\boxed{= \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)}$$

Question de cours 2. — Théorème (formule des probabilités totales) : soit A un évènement, et soit $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'évènements, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$$

Illustration. Sur la figure ci-contre, on a fait apparaître le fait que la probabilité de l'évènement A est la somme des probabilités des "petits morceaux" qui composent A, càd la somme des probabilités des évènements $A \cap A_1, \dots, A \cap A_n$.



Preuve. Soient donc A un évènement et $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'évènements.

Le point-clef consiste ici à observer que les évènements $(A \cap A_i)$ sont deux à deux disjoints, et recouvrent A. En clair, il s'agit d'établir les deux faits suivants :

$$1)\ \forall\,(i,j) \in [\![\,1,n\,]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow (A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = \emptyset \qquad \text{et} \qquad 2)\ \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i) = A$$

➤ <u>Pour le point 1</u> : il suffit d'observer que pour tout couple (i,j) d'entiers (compris entre 1 et n), on a† : $(A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = A \cap (A_i \cap A_j)$. Or si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$ puisque les A_i constituent un SCE par hypothèse. On en déduit le point 1).

➤ <u>Pour le point 2</u> : comme $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ est un système complet d'évènements, on peut déjà affirmer que : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. On en déduit que : $A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$. En utilisant encore une fois la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$, on obtient : $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)$, ce qui établit le point 2.

*. C'est-à-dire : $(A \cap B) \cap \left(A \cap \bar{B}\right) = \emptyset$. La preuve de ce fait est triviale, puisque si un élément appartient aux deux termes de l'intersection, alors il est à la fois dans B, et dans son complémentaire $\bar{B}$.

†. En utilisant l'associativité de l'intersection d'une part, et la propriété décoiffante selon laquelle $A \cap A = A$.

➤ Conclusion : d'après ce qui précède $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap A_i)\right)$. Et puisque d'après le 1), les évènements $(A \cap A_i)$ sont deux à deux disjoints, la probabilité de leur réunion est la somme de leurs probabilités individuelles, soit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_i) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_i)}$$

Il reste à voir que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a : $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_i) = \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$ (par définition de probabilité conditionnelle) pour conclure : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_i)}$.

Question de cours 3. — Propriétés de l'espérance et de la variance Soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors :

$$\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ E(aX + b) = aE(X) + b \qquad \text{et} \qquad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Preuve. Notons $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, et pour tout entier i compris entre 1 et n notons : $x_i = X(\omega_i)$ et $p_i = P(X = x_i)$. Soient a et b deux réels arbitraires.

La variable aléatoire $aX + b$ prend les valeurs : $ax_1 + b, \ldots, ax_n + b$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_n$. Il s'ensuit que :

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) p_i = \sum_{i=1}^{n} (ax_i p_i + bp_i) = a \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + b \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{=1} = aE(X) + b$$

Notons $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, et pour tout entier i compris entre 1 et n notons : $x_i = X(\omega_i)$ et $p_i = P(X = x_i)$. Soient a et b deux réels arbitraires.

La variable aléatoire $aX + b$ prend les valeurs : $ax_1 + b, \ldots, ax_n + b$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_n$. D'où :

$$V(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - E(aX + b))^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - aE(X) - b)^2 p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a^2 (x_i - E(X))^2 p_i = a^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = a^2 V(X)$$

Question de cours 4. — Théorème (formule de Koenig-Huygens) : avec les mêmes notations que ci-dessus, $V(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2$.

Preuve. *Puisque l'univers Ω est supposé fini dans ce chapitre, on pourra noter x_i les valeurs prises par la VAR X, et p_i les probabilités correspondantes.*

Avec les notations usuelles :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i}_{=E(X^2)} - 2E(X) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}_{=E(X)} + E(X)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{=1}$$

D'où : $V(X) = E\left(X^2\right) - 2E(X)^2 + E(X)^2$; soit $\boxed{V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2}$

Question de cours 5. — **Propriété (espérance de la loi binomiale)** : si X suit la loi binomiale $B(n,p)$, alors $E(X)=np$.

Preuve. On a : $E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, d'où : $E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Or pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $k\binom{n}{k}=k\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=\dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\binom{n-1}{k-1}$

Donc : $E(X)=\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-1-k}$

$$=np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{0}p^k(1-p)^{n-1-k}=np\underbrace{(p+(1-p))^{n-1}}_{=1}\text{ donc }\boxed{E(X)=np}$$

Question de cours 6. — **Inégalité de Markov**. Soit X une VAR positive. On a : $\forall a\in\mathbb{R}_+,\ a\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant E(X)$

Preuve. Soit X une VAR positive sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathbb{P})$, et soit a un réel positif. On a :

$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\})\geqslant\sum_{\omega\in\Omega,\ X(\omega)\geqslant a}X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\})\geqslant a\times\sum_{\omega\in\Omega,\ X(\omega)\geqslant a}\mathbb{P}(\{\omega\})=a\mathbb{P}(X\geqslant a)$$

Soit : $\boxed{\forall a\in\mathbb{R}_+,\ a\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant E(X)}$.

Question de cours 7. — **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**. Soit X une VAR. On a :

$$\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Preuve. Soient X une VAR, et ε un réel >0. On a : $[|X-E(X)|\geqslant\varepsilon]\iff\left[(X-E(X))^2\geqslant\varepsilon^2\right]$.

En appliquant l'inégalité de Markov à la VAR (positive) $(X-E(X))^2$ (et en prenant $a=\varepsilon^2$), on obtient :

$$E\left((X-E(X))^2\right)\geqslant\varepsilon^2\mathbb{P}\left((X-E(X))^2\geqslant\varepsilon^2\right)$$

$$\text{D'où : }\mathbb{P}\left((X-E(X))^2\geqslant\varepsilon^2\right)=\mathbb{P}(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{E\left((X-E(X))^2\right)}{\varepsilon^2}\qquad(\spadesuit)$$

Il reste à voir que : $E\left((X-E(X))^2\right)=V(X)$ $(\clubsuit)$

En effet :

$$E\left((X-E(X))^2\right)=E\left(X^2-2XE(X)+E(X)^2\right)=E\left(X^2\right)-2E(X)^2+\underbrace{E(E(X))}_{=E(X)}=E\left(X^2\right)-E(X)^2$$

Ce qui justifie $(\clubsuit)$ d'après la formule de Koenig-Huygens.

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$

Banque d'exercices

Exercice 1. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = n - X$?

Exercice 2. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0;1[$. Pour quelle valeur de k, la probabilité $p_k = P(X = k)$ est-elle maximale ?

Exercice 3. — Soit n un entier $\geqslant 2$, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$.

Calculer la probabilité $P(X = Y)$.

Exercice 4. — Soient n un entier $\geqslant 2$, et Y une VAR suivant la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 5. — **Formule de Vandermonde, révision**. Etablir que :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \ \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}$$

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = n - X$?

Par hypothèse, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $Y = n - X$. Il s'ensuit que : $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

En outre, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$P(Y = k) = P(X = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$$

Conclusion. $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et : $\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ P(Y = k) = \binom{n}{k}(1-p)^k\,(1-(1-p))^{n-k}$. Donc Y suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $(1-p)$.

Exercice 2. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0;1[$. Pour quelle valeur de k, la probabilité $p_k = P(X = k)$ est-elle maximale ?

Par hypothèse, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $p_k = P(X = k) > 0$ et :

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{\binom{n}{k+1} p}{\binom{n}{k}(1-p)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

On en déduit que :

$$p_{k+1} \geqslant p_k \iff \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \geqslant 1 \iff (n-k)p \geqslant (k+1)(1-p) \iff k \leqslant (n+1)p - 1$$

D'où :

$$p_{k+1} \geqslant p_k \iff k \leqslant \lfloor (n+1)p - 1 \rfloor$$

Conclusion. p_k est maximale lorsque $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$.

Exercice 3. — Soit n un entier $\geqslant 2$, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$.

Calculer la probabilité $P(X = Y)$.

On a : $P(X = Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k \cap Y = k) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) \times P(Y = k) = \sum_{k=0}^{n} [P(X = k)]^2$.

D'où :

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{n-k}} \right]^2 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Or : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$ (la 1ère égalité provenant de la symétrie des coefficients binomiaux ; la seconde provenant de la formule de Vandermonde)

Conclusion. $P(X = Y) = \dfrac{1}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n}$

Exercice 4. — Soient n un entier $\geqslant 2$, et Y une VAR suivant la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.
Calculer l'espérance et la variance de Y.

Puisque Y suit la loi $\mathscr{U}\left([\![0, n]\!]\right)$, on a $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et pour tout entier k compris entre 0 et n, on a : $P(Y = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

Il s'ensuit que : $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2\,(n+1)}$. D'où : $\boxed{E(Y) = \dfrac{n}{2}}$.

D'après la formule de Koenig-Huygens : $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$.

D'après ce qui précède : $E(Y)^2 = \dfrac{n^2}{4}$.

D'après la formule de transfert : $E(Y^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\,(n+1)} = \frac{n(2n+1)}{6}$.

On en déduit que : $V(Y) = \dfrac{n(2n+1)}{6} - \dfrac{n^2}{4} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{2n+1}{3} - \dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{n}{2} \times \dfrac{n+2}{6}$. D'où : $\boxed{V(Y) = \dfrac{n(n+2)}{12}}$

Exercice 5. — Formule de Vandermonde, révision. Etablir que :

$$\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}$$

Posons $P = (1+X)^n$ et $Q = (1+X)^m$.

On a : $PQ = (1+X)^{n+m} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} X^j \qquad (\spadesuit)$

Par ailleurs : $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j$ et $Q = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} X^j$. Selon la formule donnant le produit de deux polynômes, on en déduit :

$$PQ = \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{n}{k}\binom{m}{j-k} \right) X^j \qquad (\clubsuit)$$

Selon $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} X^j = \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{n}{k}\binom{m}{j-k} \right) X^j$

En identifiant les coefficients de X^n dans ces deux expressions, on obtient : $\displaystyle\binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}$.

Conclusion. $\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}$