

## Chapitre 22 : Probabilités et variables aléatoires réelles

Tout au long de ce chapitre, on se place dans la situation où l'univers de l'expérience aléatoire est *fini*.

### 1 – Expérience aléatoire et univers

Définitions d'expérience aléatoire, d'issue (ou éventualité). L'univers (souvent noté  $\Omega$ ) d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues. Un évènement est une partie de l'univers. L'évènement certain (resp. impossible) est  $\Omega$  (resp.  $\emptyset$ ).

2 – Opérations sur les évènements pour  $A$  et  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ , définitions de  $\bar{A}$  (évènement contraire de  $A$ ),  $A \cup B$  (union des évènements  $A$  et  $B$ ),  $A \cap B$  (intersection des évènements  $A$  et  $B$ ); faire le lien avec les définitions déjà rencontrées en début d'année dans le cadre de la théorie des ensembles. Deux évènements  $A$  et  $B$  sont incompatibles (ou disjoints) si  $A \cap B = \emptyset$ .

Définition : soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience aléatoire. Un système complet d'évènements (en abrégé SCE; on dit aussi partition) est une famille  $(A_i)_{i=1, \dots, n}$  d'évènements deux à deux disjoints tels que  $\bigcup_{i=1, \dots, n} A_i = \Omega$ .

Exemple fondamental : pour tout évènement  $A$ , la famille  $(A, \bar{A})$  est un système complet d'évènements.

### 3 – Probabilités

Définition : une probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  est une application  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$  telle que  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ; et si  $A$  et  $B$  sont deux parties disjointes de  $\Omega$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

Remarque : il résulte de la définition que pour tout évènement  $A$ , le réel  $\mathbb{P}(A)$  est compris entre 0 et 1.

Propriétés : 1)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ; 2)  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ ; 3)  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

Remarque : le point-clef de la démonstration du 3) est  $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

Théorème (formule des probabilités totales) : si  $A$  est un évènement, et  $(A_i)_{i=1, \dots, n}$  un système complet d'évènements, alors :  $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_i)$ .

Cas important d'application :  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$ .

Situation d'équiprobabilité : notons  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , et notons pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ . Dans le cas particulier où chaque  $p_i$  est égal à  $1/n$ ,

on parle alors d'équiprobabilité. Dans cette situation, on a pour tout évènement  $A$  :  $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$  (où  $\text{card } A$  désigne le cardinal de  $A$ , c'est-à-dire son nombre d'éléments); cette formule correspond au quotient "nombre de cas favorables / nombre de cas possibles".

### 4 – Probabilités conditionnelles et évènements indépendants

Définition : soient  $A$  et  $B$  deux évènements, avec  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ . La probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$  (c-à-d sachant que  $A$  est réalisé) est  $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ .

Remarque : il résulte de la définition que  $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)$ .

Propriétés : 1) Pour tout évènement  $B$  :  $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ . 2) Pour tout couple  $(B_1, B_2)$  d'évènements :  $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)$ .

Définition : deux évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants lorsque  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ . Lorsque c'est le cas, on a :  $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ .

Théorème (formule des probabilités totales, revisitée) : soit  $A$  un évènement, et soit  $(A_i)_{i=1, \dots, n}$  un système complet d'évènements, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque : cette formule justifie la méthode consistant à calculer des probabilités à l'aide d'un arbre pondéré, où l'on "ajoute les probas correspondant aux différents chemins, et où l'on multiplie les probas correspondant aux branches successives".

Cas important d'application :  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\bar{B}}(A) \times \mathbb{P}(\bar{B})$

### 5 – Variables aléatoires réelles

Définition : un espace probabilisé est un couple  $(\Omega, \mathbb{P})$ , où  $\Omega$  est un univers et  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $\Omega$ .

Définition : une variable aléatoire réelle  $X$  sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$  est une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Exemple : gain lors d'un jeu.

#### ► Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition : soit  $X$  une VAR. L'espérance mathématique de  $X$ , notée  $E(X)$  est le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \quad (\text{ou } E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(X = \omega))$$

Remarque : dans le cas où  $\Omega$  est fini, on peut noter  $x_1, \dots, x_n$  les différentes valeurs prises par  $X$ , et  $p_1, \dots, p_n$  les probabilités correspondantes. Avec ces notations, l'espérance de  $X$  est le réel  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ .

Remarque : on dit souvent espérance pour désigner l'espérance mathématique de  $X$ . De plus, l'espérance est également appelée **valeur moyenne** de  $X$ .

**Propriétés de l'espérance** : soient  $X$  et  $Y$  deux VAR sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Alors : 1)  $E(\lambda X) = \lambda E(X)$ ; 2)  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

► **Variance d'une variable aléatoire réelle**

**Définition** : soit  $X$  une VAR. La **variance** de  $X$  est le réel noté  $V(X)$  et défini en posant

$$V(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) (X(\omega) - E(X))^2 \text{ (ou } V(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 p_i \text{)}$$

**Théorème (formule de Koenig-Huygens)** : avec les mêmes notations que ci-dessus,  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ .

**Propriété (inégalité de Markov)** : soit  $X$  une VAR positive. Alors :  $\forall a \in \mathbb{R}_+, a\mathbb{P}(X \geq a) \leq E(X)$ .

**Théorème (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)** : soit  $X$  une VAR. Alors :  $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ .

**6 – Variables aléatoires réelles : lois usuelles**

*a – Loi uniforme*

**Définition** : soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels, avec  $n < m$ . Une VAR  $X$  suit la **loi uniforme sur  $\llbracket n, m \rrbracket$**  si  $X$  peut prendre toutes les valeurs de  $\llbracket n, m \rrbracket$  avec la probabilité  $1/(m - n + 1)$ .

*b – Loi de Bernoulli*

**Définition** : une VAR  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  si  $X$  peut prendre les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives  $p$  et  $1 - p$ .

Si tel est le cas, on a :  $E(X) = p$  et  $V(X) = p(1 - p)$ .

*c – Loi binomiale*

**Définition** : soient  $n$  un entier naturel et  $p$  un réel de  $[0; 1]$ . Une VAR.  $X$  suit la **loi binomiale de taille  $n$  et de paramètre  $p$**  ( $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ ) si  $X$  est la somme de  $n$  VAR indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

*Il revient alors au même de dire que  $X$  est égale au nombre de succès au cours de  $n$  expériences indépendantes ne pouvant conduire qu'à deux issues : "succès" avec la probabilité  $p$ , ou "échec" avec la probabilité  $(1 - p)$ .*

**Théorème** :  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$  alors

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Remarque : dans ce cadre, on obtient  $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$  comme conséquence du binôme de Newton (vérifiez que vous savez le justifier!).

**Théorème** : si  $X$  suit la loi binomiale de taille  $n$  et de paramètre  $p$ , alors :  $E(X) = np$  et  $V(X) = np(1 - p) = npq$  (avec  $q = 1 - p$ ).

**QUESTIONS DE COURS**

► **Propriété** : Si  $A$  et  $B$  sont deux évènements d'un univers  $\Omega$ , alors :  $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$  et  $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)$

► **Théorème (formule des probabilités totales)** : soit  $A$  un évènement, et soit  $(A_i)_{i=1, \dots, n}$  un système complet d'évènements, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$$

► **Théorème (formule de Koenig-Huygens)** : soit  $X$  une VAR sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$ , où  $\Omega$  est fini. On a :  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ .

► **Propriété (espérance de la loi binomiale)** : si  $X$  suit la loi binomiale  $B(n, p)$ , alors  $E(X) = np$ .

► **Propriétés de l'espérance et de la variance** Soit  $X$  une VAR, et soient  $a$  et  $b$  deux réels. On a :  $E(aX + b) = aE(X) + b$  et  $V(aX + b) = a^2V(X)$ .

► **Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.**