MPSI – Colle 28 (8 au 12 juin 2026) : applications linéaires en dimension finie

Chapitre 24 : Applications linéaires entre ev de dim. finie

1 – Rang d'une famille

2 – Rang d'une application linéaire, théorème du rang

3 – Formes linéaires et hyperplans

4 – Matrice d'une application linéaire

5 – Rang d'une matrice

6 – Matrices équivalentes, matrices semblables

a – Matrices équivalentes

b – Invariants de similitude

c – Trace d'un endomorphisme

Questions de cours

- **Théorème** : Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, et F un $\mathbb{K}$-ev ; soit $B = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v}_p\}$ une base de E. L'application

$$\psi : \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \longmapsto & F^p \\ f & \longmapsto & \left(f\left(\overrightarrow{v_1}\right), \ldots, f\left(\overrightarrow{v_p}\right)\right) \end{array}$$

  est un isomorphisme.

- **Théorème** : formule du changement de base "$A' = P^{-1}AP$"

- **Propriété** : le rang est un invariant de similitude dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

- **Propriété** : la trace est un invariant de similitude dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

- **Propriété (trace d'un projecteur)** : soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, tel que $p^2 = p$. On a : $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$

- **Corollaire de TGJ** : soit $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. On a : $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$

- *Sur le principe du volontariat* — **Théorème (Gauss-Jordan)** : soit $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. On a : $[\mathrm{rg}(A) = r] \iff [A \equiv J_r]$ ("seulement" la preuve de $\Longrightarrow$)