

COLLE 1 — QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1 — Décomposition paire + impaire (existence) : toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire définies sur $\mathbb{R}$

PREUVE. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles.

► Analyse : supposons qu'il existe deux fonctions g et h , définies sur $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire telles que $f = g + h$. Il revient au même d'écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x)$.

On a également : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(-x) + h(-x)$.

D'où (g étant paire et h impaire) : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(x) - h(x)$.

On a ainsi obtenu le système : $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$, dont la résolution aisée* donne :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

► Synthèse : à la lumière de ce qui précède, on définit donc g et h sur $\mathbb{R}$ en posant judicieusement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Il est alors clair que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x)$. Donc : $f = g + h$.

En outre : $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x)$ d'où g est paire.

Et : $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$ d'où h est impaire.

Conclusion. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, il existe un couple (g, h) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire, telles que : $f = g + h$

QUESTION DE COURS 2 — Propriété. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

PREUVE. Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

► Initialisation : pour $n = 0$, on a d'une part $\sum_{k=0}^0 k = 0$, et d'autre part $\frac{0 \times (0+1)}{2} = 0$. On en déduit que $P(0)$ est vraie.

► Hérédité : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (H.R). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^n k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ainsi : $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Donc $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

► **Conclusion** : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

*. Il suffit de faire l'addition et la soustraction des deux lignes du système.

QUESTION DE COURS 3 — Propriété (somme des cubes). $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

PREUVE. Démontrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ (phrase d'encouragement non-indispensable).

Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

► **Initialisation** : pour $n = 0$, on a d'une part $\sum_{k=0}^0 k^3 = 0$, et d'autre part $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (hypothèse de récurrence). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k^3 \right) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

Soit finalement : $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Donc $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

► **Conclusion** : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

QUESTION DE COURS 4 — Propriété (somme des termes d'une suite géométrique). Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$. On a :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

PREUVE. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$.

Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

► **Initialisation** : pour $n = 0$, on a d'une part $\sum_{k=0}^0 u_k = u_0$, et d'autre part $u_0 \times \frac{1 - q}{1 - q} = u_0$. D'où $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (hypothèse de récurrence). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) + u_{n+1} = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + u_0 \times q^{n+1} = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = u_0 \times \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

Soit finalement : $\sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$. Donc $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

► **Conclusion** : si $q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1 — (Opérations sur les ensembles). Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Démontrer que :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

EXERCICE 2 — (Pas par récurrence!). Soit $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

EXERCICE 3 — (Pas par récurrence bis!). Soit x un nombre réel. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

EXERCICE 4 — (Récurrence simple). On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \pi$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (n+1)^2 u_n$$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = 2^{2n} (n!)^2 \pi$

EXERCICE 5 — (Récurrence double). Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + 4^n$

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

Remarque. Le jour de la colle, il ne sera pas nécessaire de faire un parfait copier-coller des corrigés proposés ici pour “avoir tout bon”. En particulier, il sera totalement superflu d’écrire sur votre tableau les indications écrites en italique dans ces corrections. Ces indications ne sont présentes que pour vous aider au besoin à comprendre le plan d’une démo (notamment dans le corrigé de l’exo 2), ou à comprendre le passage d’une ligne à une autre (par exemple dans le corrigé de l’exo 1).

EXERCICE 1 — (Opérations sur les ensembles). Soient A , B et C trois parties d’un ensemble E . Démontrer que :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Soient A , B et C trois parties de E . On a :

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= A \cap \overline{(B \cap C)} && \text{(par définition)} \\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{(loi de Morgan pour les ensembles)} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) && \text{(distributivité)} \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) && \text{(par définition)} \end{aligned}$$

CONCLUSION. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

EXERCICE 2 — (Pas par récurrence !). Soit $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Soit $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$; et soit n un entier naturel arbitraire.

Notons $S = \sum_{k=0}^n q^k$, et calculons judicieusement $(q - 1)S$. On a :

$$\begin{aligned} (q - 1)S &= qS - S \\ \iff (q - 1)S &= q \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n q^k \\ \iff (q - 1)S &= \sum_{k=0}^n q^{k+1} - \sum_{k=0}^n q^k && \text{(linéarité de la somme)} \\ \iff (q - 1)S &= \sum_{k=0}^n [q^{k+1} - q^k] && \text{(linéarité de la somme de nouveau)} \\ \iff (q - 1)S &= q^{n+1} - q^0 && \text{(somme télescopique)} \end{aligned}$$

En résumé : $(q - 1)S = q^{n+1} - 1$. Puisque $q - 1 \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que : $S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.

► **CONCLUSION.** $\forall (n, q) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{R} \setminus \{1\})$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

EXERCICE 3 — (Pas par récurrence!). Soit x un nombre réel. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Soient x un réel, et soit n un entier naturel.

On a : $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^n (-x^2)^k$. C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $(-x^2)$ (donc différente de 1).

$$\text{Donc : } \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} - (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2}$$

$$\text{CONCLUSION. } \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

EXERCICE 4 — (Récurrence simple). On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \pi$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (n+1)^2 u_n$$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = 2^{2n} (n!)^2 \pi$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $u_{2n+1} = 2^{2n} (n!)^2 \pi$

► Initialisation ($n = 0$). D'une part : $u_1 = \pi$. D'autre part : $2^0 (0!)^2 \pi = \pi$. Donc $P(0)$ est vraie.

► Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . On a alors :

$$\begin{aligned} u_{2n+3} &= u_{(2n+1)+2} \\ \iff u_{2n+3} &= (2n+2)^2 u_{2n+1} && \text{(selon l'énoncé)} \\ \iff u_{2n+3} &= (2n+2)^2 2^{2n} (n!)^2 \pi && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ \iff u_{2n+3} &= 2^2 (n+1)^2 2^{2n} (n!)^2 \pi \\ \iff u_{2n+3} &= 2^{2n+2} ((n+1)!)^2 \pi \end{aligned}$$

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

$$\text{CONCLUSION. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+1} = 2^{2n} (n!)^2 \pi$$

EXERCICE 5 — (Récurrence double). Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + 4^n$

Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = 3^n + 4^n$.

► Initialisation ($n = 0$ et $n = 1$). On a : $u_0 = 2$ (énoncé) et $3^0 + 4^0 = 2$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part : $u_1 = 7$ (énoncé) et d'autre part $3^1 + 4^1 = 7$. Donc $P(1)$ est vraie.

► Hérédité. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n . On a alors :

$$u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n \quad (\text{selon l'énoncé})$$

$$\iff u_{n+2} = 7(3^{n+1} + 4^{n+1}) - 12(3^n + 4^n) \quad (\text{hypothèse de récurrence})$$

$$\iff u_{n+2} = 21 \times 3^n + 28 \times 4^n - 12 \times 3^n - 12 \times 4^n$$

$$\iff u_{n+2} = 9 \times 3^n + 16 \times 4^n$$

$$\iff u_{n+2} = 3^2 \times 3^n + 4^2 \times 4^n$$

$$\iff u_{n+2} = 3^{n+2} + 4^{n+2}$$

Ce qui signifie que $P(n+2)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + 4^n$