

Chapitre 1 : Éléments de logique et de théorie des ensembles

1 – Logique

Définitions : assertion logique (ou proposition mathématique), propositions logiquement équivalentes, table de vérité, proposition contraire $\neg P$ (ou *non* P ou $\bar{P}$), proposition $P \vee Q$, proposition $P \wedge Q$. Les opérations $\vee$ et $\wedge$ sont distributives l’une par rapport à l’autre. Principe du tiers exclus (P est vraie ou fausse), principe de non-contradiction (P ne peut être à la fois vraie et fausse).

Lois de Morgan : $\text{non}(P \vee Q) = \text{non } P \wedge \text{non } Q$ et $\text{non}(P \wedge Q) = \text{non } P \vee \text{non } Q$

Quantificateurs. Règles de négation : $\text{non}(\forall x \in E, A(x)) \equiv (\exists x \in E, \text{non } A(x))$ et $\text{non}(\exists x \in E, A(x)) \equiv (\forall x \in E, \text{non } A(x))$

2 – Ensembles

Définitions d’ensemble, d’inclusion et d’égalité entre deux ensembles. Règle de double inclusion : $A = B$ SSI $A \subset B$ et $B \subset A$. L’ensemble des parties d’un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$ (rq : l’ensemble vide $\emptyset$ et E appartiennent toujours à $\mathcal{P}(E)$).

Opérations sur les ensembles : soient E un ensemble, A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$: définition de $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $\bar{A} = E \setminus A$.

Propriétés : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (“lois de Morgan pour les ensembles”).

Définition du produit cartésien $E \times F$; notation $E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$.

3 – Exemples de démonstrations mathématiques

Démonstration d’une implication ; d’une équivalence (par double implication) ; par récurrence (simple ou double) ; par l’absurde (ex : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) ; par analyse-synthèse (décomposition “paire + impaire”).

Chapitre 2 : Méthodes algébriques

1 – Brefs rappels sur les suites

Définition. Cas particuliers des suites arithmétiques et géométriques.

2 – Sommes

Somme : notation $\sum_{i \in I} a_i$ pour (a_n) une suite et I un ensemble d’indices. En pratique on a souvent : $I = \llbracket 0; n \rrbracket$ et on note alors $\sum_{i=0}^n a_i$ la somme “ $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ”.

Propriétés des sommes : soient (a_n) et (b_n) deux suites, λ un réel.

- Linéarité : $\sum_{k=n}^p (a_k + b_k) = \sum_{k=n}^p a_k + \sum_{k=n}^p b_k$ et $\sum_{k=n}^p (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=n}^p a_k$
- “Relation de Chasles” : $\sum_{k=n}^p a_k = \sum_{k=n}^m a_k + \sum_{k=m+1}^p a_k$

QUELQUES SOMMES REMARQUABLES

- Somme des termes d’une suite géométrique. Pour (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$: $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ et $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
- Somme des premiers entiers. $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- Somme des premiers carrés. $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Somme des premiers cubes. $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2$
- Sommes télescopiques : $\sum_{k=n}^p (a_{k+1} - a_k) = a_{p+1} - a_n$

3 – Produits

Produit : notation $\prod_{i \in I} a_i$ pour (a_n) une suite et I un ensemble d’indices. En pratique on a souvent : $I = \llbracket 0; n \rrbracket$ et on note alors $\prod_{i=0}^n a_i$ le produit “ $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$ ”.

Propriétés des produits : soient (a_n) et (b_n) deux suites, λ un réel.

- $\prod_{k=p}^n (a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^n a_k \times \prod_{k=p}^n b_k$ et $\prod_{k=1}^n (\lambda a_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n a_k$

► “Relation de Chasles” : $\prod_{k=n}^p a_k = \prod_{k=n}^m a_k \times \prod_{k=m+1}^p a_k$

► Produits télescopiques : $\prod_{k=n}^p \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{p+1}}{a_n}$

Définition de factorielle : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \prod_{k=1}^n k$ et $0! = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
 $n! = (n-1)! \times n$.

4 – Coefficients binomiaux et binôme de Newton

Au programme de la colle 2.

QUESTIONS DE COURS

► **Décomposition paire + impaire (existence)** : toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est la somme d’une fonction paire et d’une fonction impaire définies sur $\mathbb{R}$

► **Somme des entiers** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

► **Somme des cubes** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2$

► **Propriété (somme des termes d’une suite géométrique)** : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$. On a :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

OBJECTIFS DE LA SEMAINE :

- **Connaître son cours**, ce qui signifie connaître les définitions, les énoncés des théorèmes, et notamment les sommes remarquables ; avoir compris les exercices vus en cours/TD.
- Pour cette semaine, et pour la suite de l’année : avoir compris le principe des

$\neq$ **méthodes de démonstration** (compétence qui sera archi-développée en cours d’année, où - presque... - tous les résultats seront prouvés).

- En particulier, être au point sur la **méthode du raisonnement par récurrence** (simple ou double).