

COLLE 2 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — Application du binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Soit n un entier naturel ≥ 2 .

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^n$ ($\spadesuit$).

D'après la formule du binôme de Newton*, on a également : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ ($\heartsuit$).

En calculant $f(1)$ à l'aide des formules ($\spadesuit$) et ($\heartsuit$), on obtient : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

► La fonction f est dérivable[†] sur $\mathbb{R}$, et on obtient deux expressions pour sa dérivée en utilisant les formules ($\spadesuit$) et ($\heartsuit$).

D'une part : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ ($\diamondsuit$) Et d'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$ ($\clubsuit$)

En calculant $f'(1)$ à l'aide des formules ($\diamondsuit$) et ($\clubsuit$), on obtient : $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

QUESTION DE COURS N°2 — “Série harmonique”. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction inverse étant décroissante sur $[n, n+1]$, on a : $\forall x \in [n, n+1], \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$. En intégrant cet encadrement sur $[n, n+1]$, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.[‡]

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, on a : $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^N [\ln(n+1) - \ln n]$. La somme de droite étant télescopique, on en

déduit : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \ln(N+1)$. Or il est connu que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(N+1) = +\infty$. On déduit de cette extraordinaire

remarque, de la question précédente et de la propriété de comparaison que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right) = +\infty$.

*. $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

†. Car f est polynomiale.

‡. Seule l'inégalité de droite nous intéresse dans la présente situation.

QUESTION DE COURS N°3 — **Propriétés des congruences.** Soit $A \in \mathbb{R}^*$.

1/ **Réflexivité** : $\forall x \in \mathbb{R}, x \equiv x [A]$

2/ **Symétrie** : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (y \equiv x [A]) \iff (x \equiv y [A])$

3/ **Transitivité** : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (y \equiv x [A] \wedge z \equiv y [A]) \implies (z \equiv x [A])$

1/ Pour tout réel x , on a : $x = x + 0 \times A$, d'où : $x \equiv x [A]$.

2/ Soient x et y deux réels tels que : $y \equiv x [A]$. Alors : $\exists k \in \mathbb{Z}, y = x + kA$. D'où : $x = y + (-k)A$, soit encore : $x = y + k'A$ avec $k' = -k \in \mathbb{Z}$. D'où : $x \equiv y [A]$.

On a ainsi établi l'implication : $(y \equiv x [A]) \implies (x \equiv y [A])$. L'implication réciproque (et donc l'équivalence) provient de ce que les réels x et y jouent des rôles symétriques dans cet énoncé.

3/ Soient x, y et z trois réels tels que : $y \equiv x [A]$ et $z \equiv y [A]$. Alors : $\exists k \in \mathbb{Z}, y = x + kA$ et $\exists k' \in \mathbb{Z}, z = y + k'A$.

D'où : $z = x + (k + k')A$. Puisque $(k + k') \in \mathbb{Z}$, cette égalité signifie que : $z \equiv x [A]$.

Par suite : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (y \equiv x [A] \wedge z \equiv y [A]) \implies (z \equiv x [A])$.

Remarque : les trois énoncés de la propriété ci-dessus signifient que la relation de congruence modulo A (ou relation de congruence) est ce que l'on appelle une **relation d'équivalence**. Nous aurons de nombreuses occasions de revoir cette notion en cours d'année (dans le cadre des matrices, des fonctions, des suites, en arithmétique et en algèbre linéaire).

QUESTION DE COURS N°5 (VOLONTARIAT) — **Binôme de Newton.**

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Soient a et b deux nombres complexes. Notons, pour tout n entier naturel, $P(n) : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

► **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $(a + b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, ce qui assure que $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : on suppose $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Alors :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{K=1}^{n+1} \binom{n}{K-1} a^K b^{n+1-K} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

La relation obtenue $(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$ signifie exactement que la propriété $P(n + 1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

QUESTION DE COURS N°4 — **Maths / Physique**. Pour tout couple de réels (a, b) , il existe un couple de réels (K, φ) tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x) + b \sin(x) = K \cos(x - \varphi)$

Soient a et b deux nombres réels. On distingue deux cas.

► **Premier cas** : $(a, b) = (0, 0)$. Dans ce cas : $\forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x) + b \sin(x) = 0$. Le couple $(0, \varphi)$ (φ étant un réel quelconque) convient.

► **Second cas** : $(a, b) \neq (0, 0)$. Dans ce cas : $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$. On peut donc écrire pour tout réel x :

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_K \left(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_A \cos(x) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_B \sin(x) \right)$$

Il résulte de la définition des réels A et B que : $A^2 + B^2 = 1$.

(♠) Par conséquent : $\exists \varphi \in \mathbb{R}, A = \cos(\varphi) \wedge B = \sin(\varphi)$.

D'où pour tout réel x :

$$a \cos(x) + b \sin(x) = K [\cos(\varphi) \cos(x) + \sin(\varphi) \sin(x)] = K \cos(x - \varphi)$$

On a ainsi établi que :

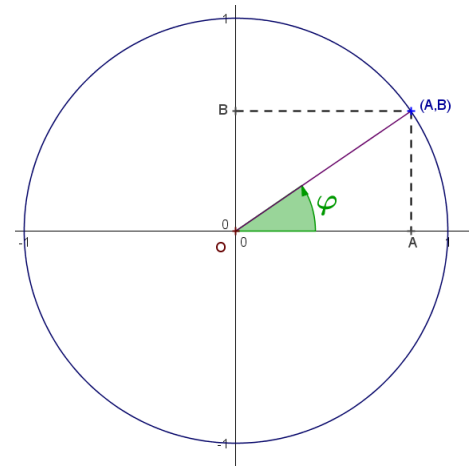
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists (K, \varphi), \forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x) + b \sin(x) = K \cos(x - \varphi)$$

Remarque (pour expliquer (♠)) : la condition $A^2 + B^2 = 1$ signifie que le point M de coordonnées (A, B) est tel que $OM = 1$.

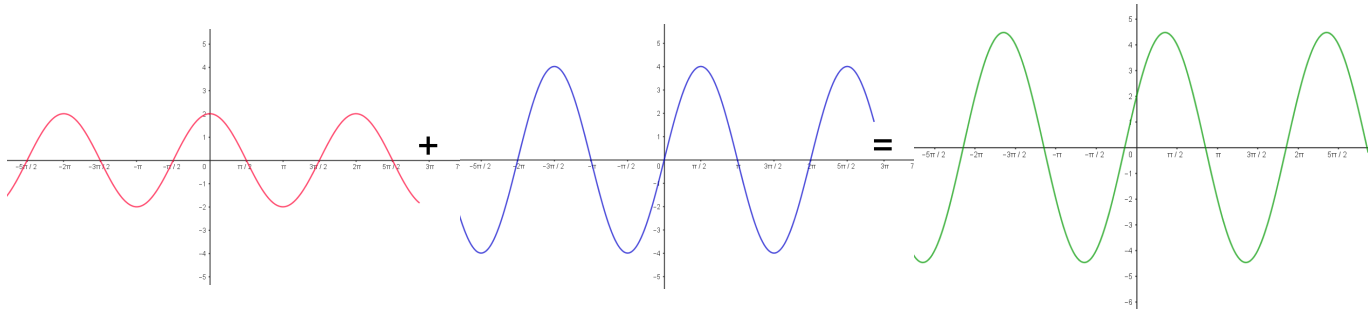
Autrement dit, la condition $A^2 + B^2 = 1$ signifie que (A, B) est le couple des coordonnées d'un point situé sur le cercle trigonométrique.

A ce titre, il existe un réel φ tel que $A = \cos(\varphi)$ et $B = \sin(\varphi)$.

Observation : un tel réel φ n'est pas unique, car n'est défini qu'à un multiple de 2π près.



Interprétation physico-mathématique de cette question de cours : “la somme de deux signaux sinusoïdaux de même période est un signal sinusoïdal, de même période que les deux signaux qui le composent”.



BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$?

EXERCICE 2. — Valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

EXERCICE 3. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$.

EXERCICE 4. — Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Calculer : $S = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)$

EXERCICE 5. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2kx}$.

Etablir que :

$$S_2 = 2^n e^{nx} \operatorname{ch}^n(x)$$

EXERCICE 6. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$?

Observons que : $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$. Selon une (des trois) formule de duplication pour le cos, on en déduit que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

Il s'ensuit que :

$$2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \iff \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Or, puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$.

CONCLUSION. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

EXERCICE 2. — Valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

Selon la formule de soustraction pour tan :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

CONCLUSION. $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

EXERCICE 3. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$.

C'est un exemple de calcul de somme à l'aide de la décomposition "rangs pairs / rangs impairs".

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut déjà observer que :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = \underbrace{\sum_{k=0, k \text{ pair}}^{2n} (-1)^k k}_{S_2} + \underbrace{\sum_{k=0, k \text{ impair}}^{2n} (-1)^k k}_{S_3} \quad (\spadesuit)$$

— **Réécriture de la somme S_2 .** On a : $S_2 = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{2n} (-1)^k k$

Or les entiers k pairs compris entre 0 et $2n$ sont exactement ceux qui s'écrivent $2m$, avec $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Par conséquent : $S_2 = \sum_{m=0}^n (-1)^{2m} 2m \iff S_2 = \sum_{m=0}^n 2m \quad (\clubsuit)$

— **Réécriture de la somme S_3 .** On a : $S_3 = \sum_{k=0, k \text{ impair}}^{2n} (-1)^k k$

Or les entiers k impairs compris entre 0 et $2n$ sont exactement ceux qui s'écrivent $2m + 1$, avec $m \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.[§]

Par conséquent : $S_3 = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{2m+1} (2m + 1) \iff S_3 = - \sum_{m=0}^{n-1} (2m + 1) \quad (\heartsuit)$

[§]. Attention au petit décalage.

On déduit de (♠), (♣) et (♥) que :

$$S_1 = \sum_{m=0}^n 2m - \sum_{m=0}^{n-1} (2m+1) = 2n + \sum_{m=0}^{n-1} [2m - (2m+1)] = 2n - \sum_{m=0}^{n-1} 1 = 2n - n = n$$

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = n$

REMARQUE. Ce qui précède est un corrigé archi-détaillé. Aux Concours, et lors de la colle de la semaine prochaine, il ne sera pas nécessaire de détailler autant ce calcul (en particulier les explications des réécritures des sommes S_2 et S_3). Explicitement, on pourra se contenter d'écrire :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{2n} (-1)^k k + \sum_{k=0, k \text{ impair}}^{2n} (-1)^k k = \sum_{m=0}^n 2m - \sum_{m=0}^{n-1} (2m+1)$$

le tout étant de comprendre (et en colle, d'expliquer) ces deux égalités.

EXERCICE 4. — Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Calculer : $S = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{2}{k} \right)$

On a : $S = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{2}{k} \right) = \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k+2}{k} \right) = \sum_{k=2}^n (\ln(k+2) - \ln(k))$

On réécrit alors diaboliquement la somme S :

$$S = \sum_{k=2}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1) + \ln(k+1) - \ln(k))$$

D'où : $S = \sum_{k=2}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1)) + (\ln(k+1) - \ln(k))$

$$\iff S = \sum_{k=2}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1)) + \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \quad (\text{linéarité de la somme})$$

$$\iff S = \ln(n+2) - \ln(3) + \ln(n+1) - \ln(2) \quad (\text{sommes télescopiques})$$

CONCLUSION. $S = \ln \left(\frac{(n+2)(n+1)}{6} \right)$

EXERCICE 5. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2kx}$.

Etablir que :

$$S_2 = 2^n e^{nx} \operatorname{ch}^n(x)$$

On a : $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2kx} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{2x})^k$.

Selon le binôme de Newton : $S_2 = (e^{2x} + 1)^n$.

D'où : $S_2 = [e^x (e^x + e^{-x})]^n = [e^x 2 \operatorname{ch}(x)]^n = e^{nx} 2^n \operatorname{ch}^n(x)$.

CONCLUSION. $S_2 = 2^n e^{nx} \operatorname{ch}^n(x)$

EXERCICE 6. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$

Soit x un réel. On a :

$$\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$$

$$\iff \cos^6(x) + \sin^6(x) = \left(\underbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x)}_{=1} \right)^3$$

$$\iff \cos^6(x) + \sin^6(x) = \cos^6(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) + \sin^6(x)$$

$$\iff 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) = 0$$

$$\iff \cos^4(x)\sin^2(x) + \cos^2(x)\sin^4(x) = 0$$

$$\iff \cos^2(x)\sin^2(x)(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = 0$$

$$\iff \cos^2(x)\sin^2(x) = 0$$

$$\iff \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

CONCLUSION. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $[\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1] \iff \left[x = 0 \quad \left[\frac{\pi}{2} \right] \right]$