

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°1 — 12 SEPTEMBRE 2026

- *La durée du devoir est d'une heure environ, les calculatrices sont interdites.*
- *Encadrez ou soulignez vos résultats, accordez du soin à la présentation et à la rédaction*

Barème indicatif : Ex1 : 6pts — Ex2 : 4pts — Ex3 : 4pts — Ex4 : 12pts

EXERCICE 1 — APPLICATIONS DU COURS Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Calculer la somme : $S_1 = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit q un réel quelconque. Calculer la somme : $S_2 = \sum_{k=0}^n q^{4k}$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme : $S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k+3}$

4/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme :

$$S_4 = \sum_{k=0}^n [(k-1)(4k^2 + 4k - 2)]$$

On écrira le résultat sous la forme $S_4 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$, où a, b, c, d et e sont des entiers à préciser.

EXERCICE 2 — UNE SUITE RÉCURRENTÉ D'ORDRE 2

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 4$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 \times (-1)^n + 3 \times 2^n$$

EXERCICE 3 — RÉCURRENTÉ "SIMPLE" Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{2}{3}$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$$

EXERCICE 4 — SUITES RÉCURRENTES “À LA LUCAS” *

Tout au long de cet exercice, on pose : $A = 1 + \sqrt{2}$

1/ Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un couple (p_n, q_n) d'entiers naturels tel que :

$$A^n = p_n + q_n\sqrt{2}$$

2/ Soit n un entier naturel quelconque. Etablir que le couple (p_n, q_n) de la question précédente est unique.

Remarque On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3/ Préciser les valeurs de p_0 , q_0 , p_1 et q_1 .

4/ Etablir que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} &= p_n + 2q_n \\ q_{n+1} &= p_n + q_n \end{cases}$$

5/ Dédire de la question précédente que pour tout entier naturel n on a :[†]

$$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$$

6/ Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right]$$

*. Edouard Lucas fut un mathématicien français du XIX^{ème}, qui a entre autres étudié les propriétés arithmétiques de certaines suites généralisant la célèbre suite de Fibonacci.

†. On pourrait aussi en déduire que pour tout entier naturel n , on a $q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$; mais on ne demande pas de le faire ici.