

CORRIGÉ DU DS DE MATHÉMATIQUES N°1 — 12 SEPTEMBRE 2026

EXERCICE 1 — **APPLICATIONS DU COURS** Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Calculer la somme : $S_1 = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. On a :

$$S_1 = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n [\ln(k+1) - \ln(k)]$$

On reconnaît alors avec soulagement une somme télescopique, et on conclut : $S_1 = \ln(n+1) - \ln(2)$

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{2} \right)$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit q un réel quelconque. Calculer la somme : $S_2 = \sum_{k=0}^n q^{4k}$

Soit n un entier naturel. Observons que : $S_2 = \sum_{k=0}^n q^{4k} = \sum_{k=0}^n (q^4)^k$. La somme S_2 est géométrique de raison q^4 . On distingue alors deux cas.

Si $q^4 \neq 1$ (càd si $q \neq \pm 1$), on a : $S_2 = \sum_{k=0}^n q^{4k} = \frac{1 - q^{4n+4}}{1 - q^4}$

Sinon, si $q^4 = 1$ (càd si $|q| = 1$), on a : $S_2 = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme : $S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k+3}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Observons que : $S_3 = 2^3 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}$

On en déduit, avec le binôme de Newton, que : $S_3 = 8(2+1)^n = 8 \times 3^n$.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_3 = 8 \times 3^n$

4/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme :

$$S_4 = \sum_{k=0}^n [(k-1)(4k^2 + 4k - 2)]$$

On écrira le résultat sous la forme $S_4 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$, où a, b, c, d et e sont des entiers à préciser.

Soit n un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=0}^n [(k-1)(4k^2 + 4k - 2)] \\ \implies S_4 &= \sum_{k=0}^n [4k^3 - 6k + 2] \quad (\text{développement sans finesse}) \\ \implies S_4 &= 4 \sum_{k=0}^n k^3 - 6 \sum_{k=0}^n k + 2 \sum_{k=0}^n 1 \quad (\text{linéarité de la somme}) \end{aligned}$$

Une triple application du cours donne :

$$\begin{aligned} S_4 &= 4 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 6 \times \frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1) \\ \implies S_4 &= n^2(n+1)^2 - 3n(n+1) + 2(n+1) \\ \implies S_4 &= n^4 + 2n^3 + n^2 - 3n^2 - 3n + 2n + 2 \end{aligned}$$

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, S_4 = n^4 + 2n^3 - 2n^2 - n + 2$

EXERCICE 2 — UNE SUITE RÉCURRENTÉ D'ORDRE 2

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 4$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 \times (-1)^n + 3 \times 2^n$$

Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times (-1)^n + 3 \times 2^n$ par récurrence double sur n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = 2 \times (-1)^n + 3 \times 2^n$.

► Initialisation ($n = 0$ et $n = 1$). D'une part : $u_0 = 5$ (énoncé) et d'autre part $2 \times (-1)^0 + 3 \times 2^0 = 5$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part : $u_1 = 4$ (énoncé) et d'autre part $2 \times (-1)^1 + 3 \times 2^1 = -2 + 6 = 4$. Donc $P(1)$ est vraie.

► Hérédité. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n . On a alors :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad (\text{selon l'énoncé})$$

$$\iff u_{n+2} = (2 \times (-1)^{n+1} + 3 \times 2^{n+1}) + 2(2 \times (-1)^n + 3 \times 2^n) \quad (\text{hypothèse de récurrence})$$

$$\iff u_{n+2} = (-2) \times (-1)^n + 6 \times 2^n + 4 \times (-1)^n + 6 \times 2^n$$

$$\iff u_{n+2} = 2 \times (-1)^n + 12 \times 2^n$$

$$\iff u_{n+2} = 2 \times (-1)^{n+2} + 3 \times 2^{n+2} \quad (\text{car } (-1)^2 = 1 \text{ et } 12 = 3 \times 2^2)$$

Ainsi $P(n+2)$ est vraie. Récurrence établie.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 \times (-1)^n + 3 \times 2^n$

EXERCICE 3 — RÉCURRENCES “SIMPLE” Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{2}{3}$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$.

► **Initialisation** ($n = 0$). D'après l'énoncé : $u_0 = \frac{2}{3}$ et $\frac{2^{2 \times 0 + 3} (0+2)! 0!}{(2 \times 0 + 4)!} = \frac{8 \times 2}{4!} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

L'assertion $P(0)$ est donc vraie.

► **Hérédité**. Supposons que l'assertion $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n .

D'après l'énoncé on a : $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$.

On en déduit, par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} \times \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$.

Ainsi : $u_{n+1} = \frac{2(n+1)2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+5)!}$

On écrit alors judicieusement :

$$u_{n+1} = \frac{2(n+1)2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+5)!} \times \frac{2n+6}{2n+6}$$

On en déduit que : $u_{n+1} = \frac{2(n+1)2^{2n+3} (n+2)! n! 2(n+3)}{(2n+5)!(2n+6)}$

Après un peu de ménage, on obtient : $u_{n+1} = \frac{2^{2n+5} (n+3)! (n+1)!}{(2n+6)!}$

Ainsi l'assertion $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$

EXERCICE 4 — SUITES RÉCURRENTES “À LA LUCAS” *

Tout au long de cet exercice, on pose : $A = 1 + \sqrt{2}$

1/ Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un couple (p_n, q_n) d'entiers naturels tel que :

$$A^n = p_n + q_n \sqrt{2}$$

Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$ l'assertion : $\exists (p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2, A^n = p_n + q_n \sqrt{2}$.

Puisque $A^0 = 1 = 1 + 0 \times \sqrt{2}$, le couple d'entiers naturels $(p_0, q_0) = (1, 0)$ convient, et permet d'établir que $P(0)$ est vraie.

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n . Alors :

$$A^{n+1} = A \times A^n = (1 + \sqrt{2}) (p_n + q_n \sqrt{2}) = (p_n + 2q_n) + (p_n + q_n) \sqrt{2}$$

En posant $p_{n+1} = p_n + 2q_n$, et $q_{n+1} = p_n + q_n$, on obtient deux entiers naturels (car p_n et q_n sont dans $\mathbb{N}$ par hypothèse de récurrence) tels que : $A^{n+1} = p_{n+1} + q_{n+1} \sqrt{2}$. D'où $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2, A^n = p_n + q_n \sqrt{2}$

Remarque. On peut aussi traiter la question 1 à l'aide du binôme de Newton, et un petit jeu d'écriture assez amusant sur les sommes.

2/ Soit n un entier naturel quelconque. Etablir que le couple (p_n, q_n) de la question précédente est unique.

Remarque On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Soit n un entier naturel. Supposons qu'il existe deux couples d'entiers naturels (p_n, q_n) et (r_n, s_n) tels que $A^n = p_n + q_n \sqrt{2} = r_n + s_n \sqrt{2}$. Alors : $p_n - r_n = (s_n - q_n) \sqrt{2}$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $s_n \neq q_n$. Alors $\sqrt{2} = \frac{p_n - r_n}{s_n - q_n}$, ce qui implique, puisque $(p_n - r_n)$ et $(s_n - q_n)$ sont entiers, que $\sqrt{2}$ est rationnel : c'est absurde (suivant l'indication rappelée dans l'énoncé).

On en déduit que $s_n = q_n$, d'où $p_n - r_n = 0$, d'où $p_n = r_n$.

Ce qui établit l'unicité du couple (p_n, q_n) .

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! (p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2, A^n = p_n + q_n \sqrt{2}$

*. Edouard Lucas fut un mathématicien français du XIX^{ème}, qui a entre autres étudié les propriétés arithmétiques de certaines suites généralisant la célèbre suite de Fibonacci.

3/ Préciser les valeurs de p_0 , q_0 , p_1 et q_1 .

D'une part $A^0 = 1 = 1 + 0 \times \sqrt{2}$; d'où $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

D'autre part : $A^1 = 1 + \sqrt{2}$ d'où $p_1 = 1$ et $q_1 = 1$.

CONCLUSION. $p_0 = 1$; $p_1 = 1$; $q_0 = 0$ et $q_1 = 1$.

4/ Etablir que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$$

C'est une conséquence immédiate des calculs faits dans la question 1 pour établir l'hérédité de $P(n)$.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$

5/ Dédire de la question précédente que pour tout entier naturel n on a :[†]

$$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$$

Soit n un entier naturel arbitraire. On a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= p_{n+1} + 2q_{n+1} = p_{n+1} + 2(p_n + q_n) = p_{n+1} + 2p_n + 2q_n \\ &= p_{n+1} + p_n + \underbrace{(p_n + 2q_n)}_{=p_{n+1}} = 2p_{n+1} + p_n \end{aligned}$$

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$

6/ Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right]$$

Une petite récurrence double pour finir !...

Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$ l'assertion : $p_n = \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right]$

La question 3, et deux calculs niveau zéro permettent d'affirmer que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Passons à l'hérédité. Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies pour un certain entier naturel n . Alors :

$$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n \quad (\text{question 5})$$

$$\Rightarrow p_{n+2} = 2 \times \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right] + \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right] \quad (\text{HR})$$

$$\Rightarrow p_{n+2} = \frac{1}{2} \left[2(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 + \sqrt{2})^n + 2(1 - \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^n \right]$$

[†]. On pourrait aussi en déduire que pour tout entier naturel n , on a $q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$; mais on ne demande pas de le faire ici.

$$\implies p_{n+2} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \sqrt{2}\right)^n \left(2(1 + \sqrt{2}) + 1\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right)^n \left(2(1 - \sqrt{2}) + 1\right) \right]$$

$$\implies p_{n+2} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \sqrt{2}\right)^n \left(3 + 2\sqrt{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right)^n \left(3 - 2\sqrt{2}\right) \right]$$

Puisqu'il n'aura naturellement échappé à personne que

$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 \text{ et } \left(3 - 2\sqrt{2}\right) = \left(1 - \sqrt{2}\right)^2$$

on déduit de ce qui précède que :

$$p_{n+2} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \sqrt{2}\right)^{n+2} + \left(1 - \sqrt{2}\right)^{n+2} \right]$$

Ce qui signifie que $P(n+2)$ est vraie. Récurrence établie.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \left(1 - \sqrt{2}\right)^n \right]$